TEKNISKA HÖGSKOLAN
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING
Tjavdar Ivanov

TENTAMEN
TLAA17 Linjär Algebra
2009-12-15, 12:00–17:00

Jour: Tjavdar Ivanov (ankn. 16 23, 0709-203611)

Betygskala för svenska studenter samt ECTS-skalan för internationella studenter:

Poäng	20–25	15–19	10–14	0–9
Betyg	5	4	3	U

Points	23–25	20–22	16–19	13–15	10–12	7–9	0–6
ECTS	A	B	C	D	E	FX	F

Lösningar anslås efter skrivningens slut på kurshemsidan `http://aragorn.hj.se/~ivtj/kurser/la`.

Alla koordinater i uppgifterna nedan anses givna i en högerorienterad ON-bas.

1. Lös matrisekvationen: $X\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = (\,3 \quad 7\,)$. (1 p)

2. Avgör om planet genom punkterna $A = (2, -3, 1)$, $B = (1, 1, 2)$ och $C = (1, -9, -4)$ innehåller origo. Motivera noga! (Svar ja/nej utan motivering ger inga poäng.) (2 p)

3. Linjerna $L_1 : (-1, -4, -1) + t(1, 2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, och $L_2 : (3, 2, 2) + s(2, 2, 1)$, $s \in \mathbb{R}$, skär varandra i punkten P. För vilket a ligger P i planet $ax + 13y - 2z = 5$? (2 p)

4. Givna är punkten $A = (2, -1, 5)$ och planet $2x + 2y + z = 3$. (2 p)

   a) Bestäm avståndet från A till planet;

   b) Ge exemplel på en rät linje genom A som är parallell med planet.

5. Linjerna $L_1 : (1, -2, 1) + t(1, 1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ och $L_2 : (4, -1, 3) + s(2, 1, 3)$, $s \in \mathbb{R}$, är givna. Ange ekvationerna för de två parallella plan Π_1 och Π_2, som innehåller varsin linje (L_1 i Π_1 och L_2 i Π_2). (2 p)

6. Ekvationen till varje cirkel i planet kan skrivas som (3 p)

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

   Bestäm a, b och c för den cirkeln som passerar genom punkterna $(-1, 0)$, $(-1, 4)$ och $(3, 4)$.

7. Ange *antalet* lösningar till ekvationssystemet (3 p)

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 0 & a & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

   för alla möjliga värden på parametern a. Bestäm (i förekommande fall) *alla* lösningar till systemet för de a för vilka systemet är inte entydigt lösbart.

8. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ speglar rummet i planet $x - y + 2z = 0$. (3 p)

   a) Bestäm F:s matris.

   b) Ange, ifall detta är möjligt, en vektor som är sin egen bild under F.

9. Den kvadratiska matrisen A har egenvektorn $\mathbf{v}$ till egenvärdet $\lambda = 2$.

   a) Visa att $\mathbf{v}$ är egenvektor även till matrisen $B = A^2$. Till vilket egenvärde? (1 p)

   b) Visa att matrisen $C = A^2 + 3A - 10I$ är singulär (dvs saknar invers). (2 p)

10. Låt $A = \begin{pmatrix}17 & -18\\ 9 & -10\end{pmatrix}$.

    a) Bestäm en matris P, sådan att matrisen $D = P^{-1}AP$ blir diagonal. (2 p)

    b) Bestäm $\sqrt[3]{A}$! (Med andra ord, ange en matris B, sådan att $B^3 = A$). (2 p)

Lycka till! God Jul och Gott Nytt År!

Lösningsskiss till skrivningen i Linjär Algebra, 2009-12-15.

1. $X = (3 \quad 7)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = (3 \quad 7)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$ $\boxed{\textbf{Svar}: X = (-1 \quad 4)}$

---

2. Punkterna A, B och C ligger på ett plan genom origo precis då (huvudsatsen!) deras ortsvektorer $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_C$ är linjärt beroende, dvs då determinanten med dessa vektorer som kolumner är lika med noll. Man har:

$$\begin{vmatrix} | & | & | \\ \mathbf{r}_A & \mathbf{r}_B & \mathbf{r}_C \\ | & | & | \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -9 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-2r_1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & -10 \\ -3 & 0 & -6 \end{vmatrix} \overset{utv.k_2}{=} -\begin{vmatrix} -5 & -10 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Alternativt, man tar fram ekvationen $7x + 3y - 5z = 0$ av planet genom punkterna A, B, och C som innehåller även origo. $\boxed{\textbf{Svar}: \text{Ja.}}$

---

3. För $t = 2$ och $s = -1$ finnes den gemensamma punkten $P = (1, 0, 1)$. Eftersom P ligger i planet upfyller dess koordinater planets ekvation, varav erhålles: $a - 2 = 5$. $\boxed{\textbf{Svar}: a = 7.}$

---

4. a) Teckna med $\mathbf{n}$ planets normal, dvs $\mathbf{n} = (2, 2, 1)^t$ och $B = (0, 0, 3)$ vara en godtycklig punkt i planet. Då ges det sökta avståndet d mellan A och planet av

$$d = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}.$$

Svar: a) $d = \dfrac{4}{3}$ l.e.
b) t ex, $L : (x, y, z) = (2, -1, 5) + t(1, -1, 0)$.

---

5. De båda planen har gemensam normal $\mathbf{n}$ vinkelrät mot båda linjerna och därmed deras riktningsvektorer. Då fås

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Svar: $\begin{cases} (1, -2, 1) \in \Pi_1 \Longrightarrow \Pi_1 : 2x - y - z = 3 \\ (4, -1, 3) \in \Pi_2 \Longrightarrow \Pi_2 : 2x - y - z = 6 \end{cases}$

---

6. De givna punkternas koordinater uppfyller cirkelns ekvation. Man får ett ekv.-system m.a.p a, b och c:

$$\begin{cases} 1 - a + c = 0 \\ 17 - a + 4b + c = 0 \\ 25 + 3a + 4b + c = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 17 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{Svar}: \text{Med t ex Gausselimination ehålles: } (a, b, c) = (-2, -4, -3).}$

---

7. Systemet är (huvudsatsen) entydigt lösbart då och endast då matrisens determinant är nollskild. Man har

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & a & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{r_3+r_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 3 & a+2 \end{vmatrix} \overset{utv.k_1}{=} \begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & a+2 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{=} (a+3)\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+3)(a-1),$$

dvs, systemet är entydigt lösbart för $a \neq -3$ och $a \neq 1$. Gausselimination i de återstående två fallen ger

$$a = -3 : \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{r_3+r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \overset{r_3+r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right),$$

dvs, systemet är olösbart. Samt för $a = 1$ fås

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{r_3+r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \overset{r_1-2r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - t \\ z = t. \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{Svar}: \text{Ej lösbart } a = -3; \text{ för } a = 1 \text{ är } (x, y, z) = (-1, 1, 0) + t(1, -1, 1),\ t \in \mathbb{R}; \text{ ent. lösnig för övriga } a.}$

---

8. a) Beteckna med $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$ Låt $\mathbf{x}$ vara en godtycklig vektor och låt $\mathbf{x}_\perp = \dfrac{1}{|\mathbf{n}|^2}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})\mathbf{n} = \dfrac{1}{6}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})\mathbf{n}$ beteckna dess ortogonala projektion på normalens riktning. Då ges dess bild av $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\mathbf{x}_\perp$. Matrisen $A = (F(\mathbf{e}_1), F(\mathbf{e}_2), F(\mathbf{e}_3))$ fås genom att fylla i bilderna av basvektorerna. Alternativt,

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{1}{3}\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{1}{3}\mathbf{n}\mathbf{n}^t\mathbf{x} = \underbrace{(I - \frac{1}{3}\mathbf{n}\mathbf{n}^t)}_{A}\mathbf{x}$$

$$= \left[I - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}(1, -1, 2)\right]\mathbf{x} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\right]\mathbf{x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

b) Speglingsplanet är "egetplan" till avbildningen – varje vektor med spets i planet är egenvektor till F för egenvärdet $\lambda = 1$ och duger därmed som svar.

Svar: a) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; b) exempelvis, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

---

9. a) $B\mathbf{v} = A^2\mathbf{v} = \{A\mathbf{v} = 2\mathbf{v}\} = AA\mathbf{v} = 2A\mathbf{v} = 2A\mathbf{v} = 4\mathbf{v}$.

b) $C\mathbf{v} = (A^2 + 3A - 10I)\mathbf{v} = A^2\mathbf{v} + 3A\mathbf{v} - 10\mathbf{v} = (4 + 3\cdot 2 - 10)\mathbf{v} = 0\,\mathbf{v}$, dvs $\lambda = 0$ är ett egenvärde till C, dvs (huvudsatsen!) C är singulär.

Svar: a) $B\mathbf{v} = 4\mathbf{v}$

---

10. **Svar**: a) $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $B = P\sqrt[3]{D}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$
