Tentamen i Linjär algebra, 7,5hp, 2009-10-17
Tid: 08:00–13:00
Hjälpmedel: Formelblad
Examinator: Anders Andersson, Kenneth Hulth
Telefon: 070-7770323, 070-3159580

TEKNISKA HÖGSKOLAN
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING

Förslag till lösningar:

1. Fyra av de fem punkterna $P_1 = (1,1,0)$, $P_2 = (3,2,-1)$, $P_3 = (-1,0,1)$, $P_4 = (-3,-1,4)$ och $P_5 = (5,3,-2)$ ligger på linjen L. Vilken av punkterna ligger *inte* på L? (2p)

   Lösning:
   Vi bildar vektorerna $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{P_1P_4} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $\overrightarrow{P_1P_5} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, och konstaterar att medan $\overrightarrow{P_1P_3} = -\overrightarrow{P_1P_2}$ och $\overrightarrow{P_1P_5} = 2\overrightarrow{P_1P_2}$, är $\overrightarrow{P_1P_4}$ inte parallell med de andra vektorerna. Det är alltså P_4 som inte ligger på linjen.

2. Är vektorerna $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ linjärt beroende? (2p)

   Lösning:
   Vektorerna är linjärt beroende om och endast om en determinant med dessa som kolonner är lika med 0.

$$\begin{array}{cccc} & & -1 & + \\ \end{array}
\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{array}{cccc} & & -1 & + \\ \end{array} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{kol. 4}}{\overset{\text{Utv.}}{=}} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{rad. 2}}{\overset{\text{Utv.}}{=}} 3\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3(4-2) = 6$$

   Vektorerna är alltså linjärt oberoende.

3. Lös matrisekvationen $A(B^t + CX) = B$, där $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. (2p)

   Lösning:

$$A(B^t + CX) = B \Leftrightarrow AB^t + ACX = B \Leftrightarrow ACX = B - AB^t \Leftrightarrow$$
$$X = (AC)^{-1}(B - AB^t) = \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\right)^{-1}\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}^{-1}\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{-35+33}\begin{pmatrix} -7 & -11 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & -18 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 11 & 18 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$$

4. (a) Visa att linjerna

$$L_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } L_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   skär varandra och bestäm deras skärningspunkt. (2p)
   Lösning:
   Vi sätter (med *olika* parametrar) respektive koordinater lika och får ekvationssystemet:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2 & + & t_1 & = & 1 & + & 2t_2 \\ 1 & - & t_1 & = & 2 & + & 2t_2 \\ -3 & + & t_1 & = & -4 & - & t_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} t_1 & - & 2t_2 & = & -1 \\ -t_1 & - & 2t_2 & = & 1 \\ t_1 & + & t_2 & = & -1 \end{array}\right. \begin{array}{cc} \boxed{1} & \boxed{-1} \\ & \\ & \end{array} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} t_1 & - & 2t_2 & = & -1 \\ & - & 4t_2 & = & 0 \\ & & 3t_2 = 0 & & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t_1 = -1 \\ t_2 = 0 \end{array}\right.$$

   Insättning i linjernas ekvationer ger att linjerna skär varandra i punkten $(1,2,-4)$.

(b) Under vilken vinkel skär linjerna varandra? (1p)

Lösning:

Vinkeln α mellan linjerna är lika med vinkeln mellan deras riktningsvektorer, dvs

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{2-2-1}{\sqrt{3}\cdot 3} = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \arccos -\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

(c) Linjerna L_1 och L_2 ligger i planet Π. Visa att linjen

$$L_3 : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$$

är parallell med Π och bestäm avståndet mellan L_3 och Π. (2p)

Lösning:

Planets normalvektor $\boldsymbol{n}$ är ortogonal mot båda linjernas riktningsvektorer, dvs

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Eftersom $\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix} = 1-9+8 = 0$ är L_3:s riktningsvektor ortogonal mot $\boldsymbol{n}$ och L_3 alltså parallell med Π.

Låt $\boldsymbol{u}$ vara en vektor mellan Π och L_3, t.ex $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}3-2\\2-1\\1-(-3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$. Avståndet mellan L_3 och Π blir då lika med längden av $\boldsymbol{u}$:s projektion på $\boldsymbol{n}$, dvs

$$\left|\frac{\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2}\boldsymbol{n}\right| = \frac{|\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1^2+3^2+4^2}} = \frac{18}{\sqrt{26}}.$$

5. Finns det något värde på konstanten a för vilket ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + az = 2a \\ x + 3y + 2az = 12 \\ 2x + ay + 8z = 16 \end{cases}$$

saknar lösning? (3p)

Lösning:

Enligt huvudsatsen uppkommer specialfall (ingen lösning eller parameterlösning) då och endast då determinanten av vänsterledets koefficientmatris är 0.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & a\\1 & 3 & 2a\\2 & a & 8\end{vmatrix} \overset{\text{Utv.}}{\underset{\text{kol. 1}}{=}} \begin{vmatrix}1 & a\\a-4 & 8-2a\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & a+2\\a-4 & 0\end{vmatrix} = -(a-4)(a+2) = 0$$

Vi behöver alltså undersöka fallen $a = 4$ och $a = -2$.

$$a = 4 : \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 4 & 8\\1 & 3 & 8 & 12\\2 & 4 & 8 & 16\end{array}\right) \boxed{-1}\ \boxed{-2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 4 & 8\\0 & 1 & 4 & 4\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \text{parameterlösning}$$

$$a = -2 : \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -2 & -4\\1 & 3 & -4 & 12\\2 & -2 & 8 & 16\end{array}\right) \boxed{-1}\ \boxed{-2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -2 & -4\\0 & 1 & -2 & 16\\0 & -6 & 12 & 24\end{array}\right) \boxed{6} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -2 & -4\\0 & 1 & -2 & 16\\0 & 0 & 0 & 120\end{array}\right)$$

Svar: Lösning saknas då $a = -2$.

6. En linjär avbildning avbildar rummets ($\mathbb{R}^3$:s) punkter genom att projicera dem på planet $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestäm avbildningsmatrisen för denna avbildning. (3p)

Lösning:
Vi bestämmer först planets normalvektor $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

För en godtycklig vektor $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ gäller då att

$$F(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} - \frac{\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{2^2 + 1^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{2x + y - z}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \left(\begin{pmatrix} 6x \\ 6y \\ 6z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4x + 2y - 2z \\ 2x + y - z \\ -2x - y + z \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2x - 2y + 2z \\ -2x + 5y + z \\ 2x + y + 5z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

avbildningsmatrisen är $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

7. Diagonalisera matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, dvs bestäm in inverterbar matris P och en diagonalmatris D så att $D = P^{-1}AP$. (3p)

Lösning:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Egenvärden:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 3-\lambda \\ 1 & -\lambda & 3-\lambda \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 3-\lambda \\ \lambda-2 & 2-\lambda & 0 \\ \lambda-2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{Utv. kol. 3}}{=}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2-\lambda \\ \lambda-2 & 1 \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 \\ \lambda-2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1) = 0$$

$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 1$

Egenvektorer:

$$\lambda = 3: \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \boxed{-1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \boxed{-1}\ \boxed{-\tfrac{1}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \boxed{-1}\ \boxed{-1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1: \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \boxed{-1}\ \boxed{-2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} -2z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eftersom egenvektorer hörande till skilda egenvärden är linjärt oberoende kan vi sätta $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Låt $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Visa först att vektorerna

$$\boldsymbol{e}'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}'_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

är en annan bas i $\mathbb{R}^3$ och skriv sedan vektorn $\boldsymbol{u} = 4\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3$ i basen $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$. (3p)

Lösning:
Vektorerna bildar en bas om de är linjärt oberoende vilket vi undersöker med hjälp av en determinantberäkning:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{rad 3}}{\overset{\text{Utv.}}{=}} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

dvs, vektorerna bildar en bas.

Antag att $\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{e}'_1 + c_2\boldsymbol{e}'_2 + c_3\boldsymbol{e}'_3$. Det följer:

$$c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2c_1 & + & c_2 & + & 3c_3 & = & 4 \\ c_1 & & & + & 2c_3 & = & 0 \\ & & & & c_3 & = & -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 2 \\ c_2 = 3 \\ c_3 = -1 \end{array} \right.$$

Svar: $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{e}'_1 + 3\boldsymbol{e}'_2 - \boldsymbol{e}'_3$, dvs $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ i basen $\boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}'_2\boldsymbol{e}'_3$.

9. Sträckan AB är diameter i en cirkel med medelpunkt M. Punkten C ligger på cirkelns rand. Visa med vektorräkningar att vektorerna $\overrightarrow{AC}$ och $\overrightarrow{BC}$ är ortogonala. (2p)

Lösning:
Vi utnyttjar att $\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AM}$ och att $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\overrightarrow{MC}\right|$ och får:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) \bullet (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) \bullet (-\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) = \\ &= \overrightarrow{MC} \bullet \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AM} = \left|\overrightarrow{MC}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AM}\right|^2 = 0, \end{aligned}$$

dvs $\overrightarrow{AC}$ och $\overrightarrow{BC}$ är ortogonala.