Tentamen i Matematisk Analys, 7,5 h p, 2009-12-17
Tid: 12.00 – 17.00
Hjälpmedel: Formelblad (bilaga till tentamen)
Examinator: Kenneth Hulth

TEKNISKA HÖGSKOLAN
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING

Lösningsförslag (i kortfattad form):

Del A

1. Lös olikheten $\dfrac{3x}{x+2} \le 1$ (2p)

$\dfrac{3x}{x+2} \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{3x}{x+2} - \dfrac{x+2}{x+2} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x-1)}{x+2} \le 0$. Teckenstudium ger $-2 < x \le 1$

<u>Svar:</u> $-2 < x \le 1$

2. Ekvationen $z^4 - 2z^3 + 14z^2 - 18z + 45 = 0$ har roten z = 1+2i.
   Lös ekvationen fullständigt. (2p)

Sätt p(z) = $z^4 - 2z^3 + 14z^2 - 18z + 45$. Då p(z) har enbart reella koefficienter är även z = 1-2i en rot och faktorsatsen ger att (z-(1+2i))(z-(1-2i) delar p(z), dvs $(z^2 - 2z + 5)$ delar p(z).
Polynomdivision ger sedan $z^4 - 2z^3 + 14z^2 - 18z + 45 = (z^2 - 2z + 5)\,(z^2 + 9)$.
$(z^2 + 9) = 0$ ger $z = \pm 3i$

<u>Svar:</u> $z = 1 \pm 2i,\ z = \pm 3i$

3. Beräkna a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{2x}$ (1p) b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 4}$ (2p)

a) $\dfrac{e^{3x} - 1}{2x} = \dfrac{(e^{3x} - 1)}{3x}\dfrac{3}{2} \to \dfrac{3}{2}$ $x \to 0$ (standardgränsvärde) . <u>Svar:</u> $\dfrac{3}{2}$

b) $\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 4}$ = (förläng med konjugatet, utnyttja att $x > 0$) =

$$= \frac{2x - 4}{x\left(\sqrt{1 + 2/x} + \sqrt{1 + 4/x^2}\right)} = \frac{2 - 4/x}{\sqrt{1 + 2/x} + \sqrt{1 + 4/x^2}} \to \frac{2}{2} = 1 \text{ för } x \to \infty .$$

<u>Svar:</u> 1

4. Beräkna a) $\int 2x\cos x\,dx$ (1p) b) $\int \frac{dx}{x^2-x-2}$ (2p)

a) $\int 2x\cos x dx = 2x\sin x - \int 2\sin x dx = 2x\sin x + 2\cos x + C$

<u>Svar:</u> $2x\sin x + 2\cos x + C$

b) $\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+1)}$ $ger\ A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}$ $(Handpåläggning)$

$$\int \frac{1}{x^2-x-2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x-2)}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x+1)}dx = \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + C$$

<u>Svar:</u> $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + C$

5. Lös differentialekvationen $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 + 1$ (2p)

y_h : $y''+3y'+2y = 0$ $ger\ karaktäristiska\ ekv\ r^2 + 3r + 2 = 0\ med\ lösningarna$

$r_1 = -1\ och\ r_2 = -2,\ dvs\ y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$.

y_p : $ansätt\ y = Ax^2 + Bx + C, vilket\ ger\ y' = 2Ax + B\ och\ y'' = 2A.\ Insättning\ ger\ sedan$

$2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 + 1. Identifiering\ ger\ därefter\ A = 1, B = -3, C = 4,$

$vilket\ ger\ y_p = x^2 - 3x + 4.\ Lösningen\ till\ ekvationen\ ges\ av\ y = y_h + y_p$

<u>Svar:</u> $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + x^2 - 3x + 4$

6. Bestäm samtliga asymptoter och extrempunkter till $y = \frac{x^2+2x+4}{2x}$. Rita kurvan. (3p)

<u>Asymptoter</u>: Lodräta: $x = 0,\ \lim_{x\to 0^-} y = +\infty,\ \lim_{x\to 0'} y = -\infty$

Vågräta: $\lim_{x\to\pm\infty} y = \pm\infty$, dvs vågräta asymptoter saknas.

Sneda: y kan skrivas $y = \frac{x}{2} + 1 + \frac{2}{x}, där\ \frac{2}{x} \to 0\ för\ x \to \pm\infty,\ dvs\ y = \frac{1}{2}x + 1$

<u>Extremvärden:</u> $y' = \frac{2x(2x+2) - 2(x^2+2x+4)}{4x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2}$,

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Teckenstudium ger lokalt max i (-2,-1), lok min i (2,3)

<u>Svar:</u> x=0 och $y = \frac{1}{2}x + 1$ asymptoter

Lokalt max i (-2,-1), lok min i (2,3)

Del B

7. Lös ekvationen $\ln\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}=2$. (2p)

$$Då\ \ x>0\ \ fås\ \ln\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}=2\Leftrightarrow -\ln x+\frac{1}{\ln x}=2\ \Leftrightarrow (\ln x)^2+2\ln x-1=0$$

$$vilket ger\ \ \ln x=-1\pm\sqrt{2}\ \ och\ \ x=e^{-1\pm\sqrt{2}}$$

<u>Svar:</u> $x=e^{-1\pm\sqrt{2}}$

8. Beräkna integralen $\int_0^2\frac{3x}{x^2+4x+8}\,dx$. (3p)

$$\int_0^2\frac{3x}{x^2+4x+8}\,dx=\int_0^2\frac{3x}{(x+2)^2+4}\,dx=\frac{1}{4}\int_0^2\frac{3x}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}\,dx=$$

$$=/\ Sätt\ \frac{x+2}{2}=y,\ x=2y-2,\ \ dx=2dy,\ \ x=0\Leftrightarrow y=1,\ x=2\Leftrightarrow y=2\ /=$$

$$=\frac{1}{4}\int_1^2\frac{6y-6}{1+y^2}2dy=\frac{12}{4}\int_1^2\frac{y-1}{1+y^2}\,dy=\frac{3}{2}\int_1^2\frac{2y}{1+y^2}\,dy-3\int_1^2\frac{dy}{1+y^2}=\frac{3}{2}\Big[\ln\left|1+y^2\right|\Big]_1^2-3\Big[\arctan y\Big]_1^2=$$

$$\frac{3}{2}(\ln 5-\ln 2)-3(\arctan 2-\arctan 1)$$

<u>Svar:</u> $\frac{3}{2}\ln\frac{5}{2}-3\arctan 2+\frac{3\pi}{4}$

9. När en cirkelformad metallskiva värms i en ugn ökar dess radie med hastigheten 0,01 cm/min. Hur snabbt ändras skivans area när radien är 50 cm? (2p)

$$A=\pi r^2\ .Texten\ ger\ \frac{dr}{dt}=0.01cm/\min, r=50cm.$$

$$A'(t)=2\pi r\frac{dr}{dt}\ \ ger\ \ då\ \ A'(t)=2\pi\cdot 50cm\cdot 0.01cm/\min=\pi\, cm^2/\min$$

Svar: $\pi\, cm^2/\min$

10. I ett hus där innertemperaturen är 20 grader C upphör plötsligt värmesystemet att fungera. Om temperatursänkningen per tidsenhet är proportionell mot skillnaden mellan inner- och yttertemperatur och temperaturen efter 2 timmar sjunkit till 15 grader C, vilken blir då temperaturen i huset efter ett dygn?
Vi antar att yttertemperaturen hela tiden är konstant, – 10 grader C. (3p)

Sätt y = innertemperaturen. Texten ger y'=-k (y - (-10), y(0) =20, y(2)=15.

$$y' + ky = -10k \ \ ger \ \ med \ \ \text{int}\, egrerande \ faktorn \, e^{kt} : \ (y \cdot e^{kt})' = -10k\, e^{kt}$$

$$Vi \ \ får \ då \ \ y \cdot e^{kt} = -\int 10k\, e^{kt}\, dt = -10 \cdot e^{kt} + C, \ dvs \ \ y = -10 + C \cdot e^{-kt}.$$

$$y(0) = 20 \ \ ger \ \ sedan : \ 20 = -10 + C \cdot e^{0} \ \ \Leftrightarrow C = 30$$

$$Med \ \ y(t) = -10 + 30 \cdot e^{-kt} \ \ och \ \ y(2) = 15 \ \ fås \, 15 = -10 + 30 \cdot e^{-k \cdot 2} \Leftrightarrow e^{-2k} = \frac{25}{30} \Leftrightarrow k = \ln\left(\frac{6}{5}\right)^{½}$$

$$Detta \ \ ger \ \ y(24) = -10 + 30 \cdot e^{-\ln\left(\frac{6}{5}\right)^{½} \cdot 24} = -10 + 30 \cdot e^{-12\ln\left(\frac{6}{5}\right)} = -10 + 30 \cdot e^{12\ln\left(\frac{5}{6}\right)} = -10 + 30 \cdot e^{\ln\left(\frac{5}{6}\right)^{12}} =$$

$$= -10 + 30 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{12} \ \ (vilket\, är \ \ ca \ -6{,}6 \ \ grader \ \ C).$$

<u>Svar:</u> $-10 + 30 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{12}$