**Tentamen i Matematisk analys, 7,5hp, 2010-01-14**
**Tid:** 08:00–13:00
**Hjälpmedel:** Formelblad
**Examinator:** Fredrik Abrahamsson
**Telefon:** 036-101620

TEKNISKA HÖGSKOLAN
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING

---

## Förslag till lösningar:

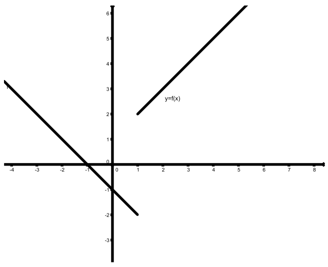
## Del A

1. Lös ekvationen $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ fullständigt. En lösning är $x = -2$. (2p)

   *Lösning*:
   Polynomdivision ger $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = (x+2)(x^2 - 5x + 4) = (x+2)(x-4)(x-1)$ så att rötterna är $x = -2, 1, 4$.

2. Låt $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x-1|}$. Bestäm $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ och $\lim_{x\to 1^-} f(x)$. Existerar gränsvärdet $\lim_{x\to 1} f(x)$? (2p)

   *Lösning*:
   Eftersom
   $$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{om } x > 1 \\ -(x-1) & \text{om } x < 1 \end{cases}$$
   så följer efter förenkling att
   $$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{om } x > 1 \\ -x-1 & \text{om } x < 1 \end{cases}$$
   och alltså är
   $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x + 1 = 2 \text{ och } \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -x - 1 = -2.$$
   Eftersom höger- och vänstergränsvärde är olika vid $x = 1$ så existerar inte gränsvärdet $\lim_{x\to 1} f(x)$.



3. Bestäm den primitiva funktion $F(x)$ till $f(x) = \sin(x)\sqrt{2\cos(x) + 1}$ som uppfyller $F(0) = 0$. (2p)

   *Lösning*:
   Variabelsubstitutionen $u = 2\cos(x) + 1$ ger $du = -2\sin(x)dx$ dvs. $\sin(x)dx = -\frac{1}{2}du$ och
   $$F(x) = \int \sin(x)\sqrt{2\cos(x)+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C = -\frac{1}{3}(2\cos(x)+1)^{3/2} + C.$$
   Villkoret $F(0) = 0$ ger $C = \frac{1}{3}\cdot 3^{3/2} = \sqrt{3}$ dvs. $F(x) = -\frac{1}{3}(2\cos(x)+1)^{3/2} + \sqrt{3}$.

4. Lös för $x > 0$ differentialekvationen (3p)
   $$y' + \frac{1}{x}y = \cos(x)$$

   *Lösning*:
   Ekvationen är linjär av 1:a ordningen. En integrerande faktor är
   $$IF = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln|x|} = [x > 0] = x$$
   och efter multiplikation med $IF$ så kan differentialekvationen i uppgiften skrivas som
   $$(xy)' = x\cos(x) \Leftrightarrow xy = \int x\cos(x)\,dx + C = [\text{part. int.}] = x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx + C = x\sin(x) + \cos(x) + C$$
   dvs.
   $$y(x) = \sin(x) + \frac{\cos(x) + C}{x}.$$

5. Lös differentialekvationen (3p)

$$y'' + 2y' + y = -2e^{-4x}$$

*Lösning*:
Vi skriver $y = y_h + y_p$. För homogenlösningen betraktar vi den karateristiska ekvationen $r^2 + 2r + 1 = 0$ som har dubbelroten $r_{1,2} = -1$ och därmed är homogenlösningen $y_h(x) = (C_1 + C_2x)e^{-x}$. För att hitta partikulärlösningen kan man t.ex. ansätta $y_p = ze^{-4x}$. Då är

$$\begin{aligned} y_p' &= z'e^{-4x} - 4ze^{-4x} \\ y_p'' &= z''e^{-4x} - 8z'e^{-4x} + 16ze^{-4x} \end{aligned}$$

och insättning i den ursprungliga ekvationen ger

$$z''e^{-4x} - 8z'e^{-4x} + 16ze^{-4x} + 2(z'e^{-4x} - 4ze^{-4x}) + ze^{-4x} = -2e^{-4x}$$

vilket efter förenkling blir $z'' - 6z' + 9z = -2$. Ansatsen $z = A$ ger $z = -2/9$ så att $y_p = -\frac{2}{9}e^{-4x}$. Sammantaget är lösningarna

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (C_1 + C_2x)e^{-x} - \frac{2}{9}e^{-4x}\,.$$

6. Rita kurvan $y = \dfrac{2x^3 + x^2 - 4}{x^2 - 4}$ med angivande av samtliga extrempunkter och eventuella asymptoter. (3p)

*Lösning*:
Vi noterar att funktionen är definierad för $x \neq \pm 2$. Vi deriverar och får

$$y'(x) = \frac{(6x^2 + 2x)(x^2 - 4) - (2x^3 + x^2 - 4)2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$$

så att stationära punkter är $x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$ och $x = 0$. Teckenstudie:

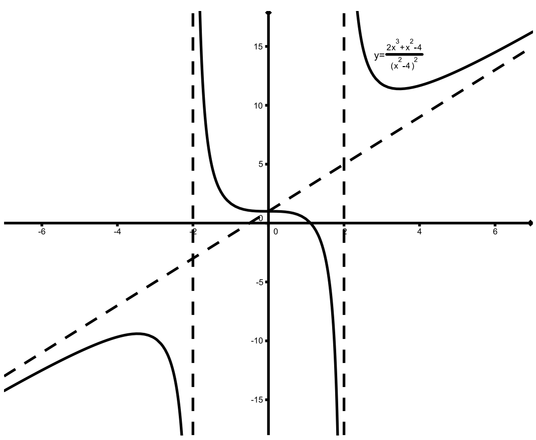
| $x$ | | $-2\sqrt{3}$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $2\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | ej def | $-$ | $0$ | $-$ | ej def | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | $y(-2\sqrt{3})$ | $\searrow$ | ej def | $\searrow$ | $y(0)$ | $\searrow$ | ej def | $\searrow$ | $y(2\sqrt{3})$ | $\nearrow$ |

Tydligen är extrempunkterna $x = -2\sqrt{3}$, en lokal maxpunkt samt $x = 2\sqrt{3}$, en lokal minpunkt (punkten $x = 0$ är en terasspunkt och därmed inte en extrempunkt).

Vidare, eftersom $|y(x)| \to \infty$ då $x \to \pm 2^{\pm}$ så följer att linjerna $x = \pm 2$ är lodräta asymptoter. För att avgöra om det finns någon sned asymptot kan man t.ex. använda polynomdivision och skriva

$$y(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 4}{x^2 - 4} = 2x + 1 + \frac{8x}{x^2 - 4}$$

vilket visar att linjen $y = 2x + 1$ är en sned asymptot då $x \to \pm\infty$. En skiss av grafen ser ut enligt nedan.



## Del B

7. Låt $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^x + 2x + 1$. Bestäm det minsta talet $a$ så att $f(x)$ blir inverterbar på intervallet $[a, \infty[$. För vilka $x$ är funktionen $f^{-1}(x)$ definierad då? (3p)

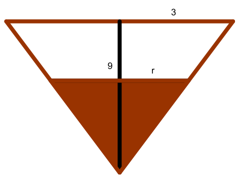
   *Lösning*:
   Vi deriverar funktionen; $f'(x) = e^{2x} - 3e^x + 2 = (e^x - 1)(e^x - 2)$ och gör en teckenstudie;

| $x$ | | $\ln 1 = 0$ | | $\ln 2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $f(0)$ | $\searrow$ | $f(\ln 2)$ | $\nearrow$ |

   Tydligen är $f$ växande på intervallet $[\ln 2, \infty[$ och därmed är $f$ inverterbar på detta intervall, dvs. $a = \ln 2$. Om vi inverterar funktionen på detta intervall så är $D_{f^{-1}} = V_f = [f(\ln 2), \infty[ = [-3 + 2\ln 2, \infty[$.

8. Vatten fylls på i en konisk tank med 1 kubikmeter per minut. Tanken har höjden 9 m och toppradien är 3 m. Hur snabbt stiger vattenhöjden i tanken när man har hällt i 2 m$^3$ vatten? (Volymen av en kon med radien $r$ och höjden $h$ är $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.) (3p)

   *Lösning*:
   Antag att den kon som är vatten i har radien $r$ och höjden $h$. Med hjälp av likformiga trianglar så inser vi att $\dfrac{r}{h} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$ dvs. $r = \frac{1}{3}h$




   och volymen kan skrivas
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{27}\pi h^3.$$
   Notera att $V = V(t)$ och $h = h(t)$ och då $V = 2$ så är $h = (54/\pi)^{1/3}$. Implicit derivering m.a.p $t$ i sambandet ovan ger
$$V' = \frac{1}{27}\pi \cdot 3h^2 \cdot h' \Leftrightarrow h' = \frac{9V'}{\pi h^2}\,.$$
   Eftersom $V' = 1$ m$^3$/min så får vi att
$$h' = \frac{9}{\pi\left((54/\pi)^{1/3}\right)^2} = \frac{9}{\pi^{1/3}(54)^{2/3}} \text{ m/min} \,(\approx 0.43 \text{ m/min})$$

9. Antag att $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$. Beräkna gränsvärdet (2p)
$$\lim_{a\to 2} \frac{f(2a) - f(4)}{a - 2}\,.$$

   *Lösning*:
$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 2} \frac{f(2a) - f(4)}{a-2} &= \left[\begin{array}{l} \text{låt } h + 4 = 2a \Leftrightarrow a = \frac{h}{2} + 2 \\ a \to 2 \Leftrightarrow h \to 0 \end{array}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(h+4) - f(4)}{h/2} = 2\lim_{h\to 0}\frac{f(h+4) - f(4)}{h} \\
&= 2f'(4) = 2\frac{\sin 4}{4}
\end{aligned}$$

10. Antag att $f(x)$ är kontinuerlig för $x \geq 0$, deriverbar för $x > 0$ och att $f(0) = 0$. Visa att om $f'(x)$ är en växande funktion för $x > 0$ så är även $\dfrac{f(x)}{x}$ en växande funktion för $x > 0$. (2p)

*Lösning*:
Låt $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Då är

$$g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$$

så påståendet följer om vi kan visa att $g'(x) \geq 0$ för alla $x > 0$. Med hjälp av analysens huvudsats kan vi skriva

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{x^2}\left(f'(x)x - \int_0^x f'(t)\,dt\right) = \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x f'(x)\,dt - \int_0^x f'(t)\,dt\right) \\ &= \frac{1}{x^2}\int_0^x \big(\underbrace{f'(x) - f'(t)}_{\geq 0}\big)\,dt \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

och vi är klara.

En alternativ lösning är följande: givet $x > 0$, definiera en funktion

$$h(t) = f'(x)t - f(t)\,.$$

Vi skall visa att $h(x) = f'(x)x - f(x) \geq 0$ (vilket medför att $g'(x) \geq 0$). Man får att $h'(t) = f'(x) - f'(t)$ och eftersom $f'(x)$ är växande så har vi följande teckenstudie;

| $t$ | $0$ | | $x$ | |
|---|---|---|---|---|
| $h'(t)$ | | $\geq 0$ | $0$ | $\leq 0$ |
| $h(t)$ | $h(0)$ | $\nearrow$ | $h(x)$ | $\searrow$ |

Eftersom $h(0) = 0$ så ger tabellen att $h(x) \geq 0$.