**Tentamen i Matematisk analys, 7,5hp, 2010-05-25**
**Tid:** 12:00–17:00
**Hjälpmedel:** Formelblad
**Examinator:** Anders Andersson
**Telefon:** 036-101621, 070-7770323

TEKNISKA HÖGSKOLAN
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING

## Förslag till lösningar:

## Del A

1. Beräkna det komplexa talet $\dfrac{5-i}{1+2i}$. (1p)

*Lösning*:
Förlängning med konjugatet ger

$$\frac{5-i}{1+2i} = \frac{(5-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5-10i-i-2}{1+4} = \frac{3}{5} - \frac{11}{5}i.$$

2. Lös ekvationen $\ln(x+1) = \ln 6 - \ln x$. (2p)

*Lösning*:

$$\ln(x+1) + \ln x = \ln 6 \Leftrightarrow \ln((x+1)x) = \ln 6 \Rightarrow x^2 + x = 6 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x_1 = -3), x_2 = 2$$

Svar: $x = 2$. ($x = -3$ är en falsk rot som inte löser ekvationen.)

3. För vilka $x \in \mathbb{R}$ är $|x-3| + |2x-8| < x+1$? (2p)

*Lösning*:
Lösningen av olikheten $|x-3| + |2x-8| < x+1$ delas upp i tre fall, $x < 3$, $3 \leq x < 4$, och $x \geq 4$.

| $x < 3:$ | $3 \leq x < 4:$ | $x \geq 4:$ |
|---|---|---|
| $-(x-3) - (2x-8) < x+1$ | $x - 3 - (2x-8) < x+1$ | $x - 3 + 2x - 8 < x+1$ |
| $-x + 3 - 2x + 8 < x+1$ | $x - 3 - 2x + 8 < x+1$ | $2x < 12$ |
| $10 < 4x$ | $4 < 2x$ | $x < 6$ |
| $x > \dfrac{5}{2}$ | $x > 2$ | |

Från det första fallet konstaterar vi att alla $x \in ]5/2, 3[$ löser olikheten, från det andra fallet att alla $x \in [3, 4[$ löser olikheten och från det tredje att alla $x \in [4, 6[$ löser olikheten.

Tillsammans betyder detta att alla $x \in ]5/2, 6[$ löser olikheten.

4. Bestäm den primitiva funktionen $\displaystyle\int \frac{3x-4}{x^2+2x}\,dx$. (2p)

*Lösning*:
Partialbråksuppdelning av integranden:

$$\frac{3x-4}{x^2+2x} = \frac{3x-4}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)}$$

$$\begin{matrix} x: \\ 1: \end{matrix} \begin{cases} A + B & = 3 \\ 2A & = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 5 \end{cases}$$

Det följer:

$$\int \frac{4x-3}{x^2+2x}\,dx = \int \left(-\frac{2}{x} + \frac{5}{x+2}\right) dx = -2\ln|x| + 5\ln|x+2| + C$$

5. Bestäm talet a så att funktionen $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{\sin^2 x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$

blir kontinuerlig i $x = 0$. (2p)

*Lösning*:
Funktionen är kontinuerlig i $x = 0$ om

$$a = f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} = -\frac{1}{2} \cdot 1^2 = -\frac{1}{2}.$$

6. Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$. Skissa funktionens graf och ange alla eventuella asymptoter. (3p)

*Lösning*:

Polynomdivision ger

$$\frac{x^2+3}{x-1} = x+1+\frac{4}{x-1}.$$

Eftersom sista termen går mot 0 då $x \to \pm\infty$, är $y = x+1$ en sned asymptot. Dessutom är $x = 1$ en lodrät asymptot (division med 0.)

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = $$
$$= \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

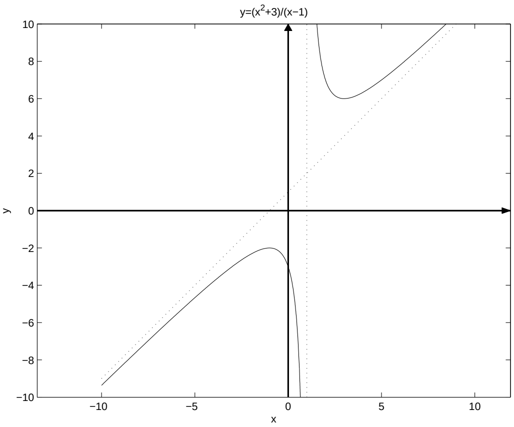
Teckenschema:

| $x$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-3$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $(x-1)^2$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $*$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | max | $\searrow$ | $*$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

Polynomdivision:

$$\begin{array}{rrl}
x & +1 & \\
\hline
x^2 & \quad +3 & \big|\; x-1 \\
-(x^2 & -x) & \\
\hline
x & +3 & \\
-(x & -1) & \\
\hline
 & 4 &
\end{array}$$

Svar:




Maxpunkt: $x = -1$, $(y = -2)$, Minpunkt: $x = 3$, $(y = 6)$, Sned asymptot: $y = x+1$, Lodrät asymptot: $x = 1$.

7. Bestäm samtliga lösningar till differentialekvationen $y'' - 4y' + 4y = 8x^2 - 12$. (3p)

*Lösning*:

Vi bestämmer först lösningarna $y_h$ till den homogena ekvationen $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Karakteristisk ekvation: $r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r-2)^2 = 0 \Leftrightarrow r_{1,2} = 2$

$y_h = (C_1x + C_2)e^{2x}$

Partikulärlösning:

Antag att $y_p = Ax^2 + Bx + C$

$y_p' = 2Ax + B$

$y_p'' = 2A$

Insättning i ekvationen ger ekvationssystemet $2A - 4(2Ax+B) + 4(Ax^2+Bx+C) = 8x^2 - 12$

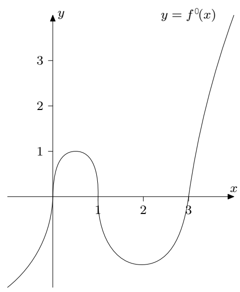
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4A & & & & & = & 8 \\ -8A & + & 4B & & & = & 0 \\ 2A & - & 4B & + & 4C & = & -12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 2 \\ B = 4 \\ C = 0 \end{array}\right.$$

Alltså är $y_p = 2x^2 + 4x$

och $y = 2x^2 + 4x + (C_1x + C_2)e^{2x}$.

## Del B

8. Grafen till derivatan av funktionen $f(x)$ är ritad i figuren. (2p)
För vilka värden på $x$ har $f(x)$ lokala minima? Motivera!




*Lösning*:
Man ser ur grafen att $f'(x) = 0$ för $x = 0$, $x = 1$ och $x = 3$. Följande teckenschema följer också ur grafen:

| $x$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | max | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

Svar: $f(x)$ har lokala min-punkter för $x = 0$ och $x = 3$.

9. Lös differentialekvationen $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)\arctan x$, $y(0) = 2$. (3p)

*Lösning*:
Ekvationen är en linjär 1:a ordningens DE.

$$y' - \frac{2x}{1+x^2} = \arctan x$$

$$g(x) = -\frac{2x}{1+x^2} \quad G(x) = -\ln(1+x^2) \quad IF = e^{-\ln(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{y'}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{\arctan x}{1+x^2}$$

Integration av båda sidor ger

$$\frac{y}{1+x^2} = \int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \begin{bmatrix} t = \arctan x \\ dt = \frac{1}{1+x^2}\,dx \end{bmatrix} = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\arctan x)^2}{2} + C$$

$$y = \frac{(1+x^2)(\arctan x)^2}{2} + C(1+x^2)$$

$$y(0) = 0 + C = 2 \Rightarrow y = \frac{(1+x^2)(\arctan x)^2}{2} + 2(1+x^2) = \frac{(1+x^2)\left((\arctan x)^2 + 4\right)}{2}$$

10. Vilket är det största värde funktionen $f(x) = \sqrt[x]{x}$, $x > 0$ antar?
(*Tips*: $\sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(x^{1/x})}$.) (3p)

*Lösning*:

$$f(x) = \sqrt[x]{x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$$

$$f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Teckenschema:

| $x$ | | $e$ | |
|---|---|---|---|
| $e^{\frac{\ln x}{x}}$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $1 - \ln x$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $x^2$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | max | $\searrow$ |

$f(x)$ är strängt växande på $]0, e]$ och strängt avtagande på $[e, \infty[$. Funktionens största värde är alltså $f(e) = \sqrt[e]{e} (\approx 1.4447)$.

11. Om definitionsmängden till funktionen $f(z) = e^{\pi z}$ begränsas till

$$D_f = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}, \operatorname{Im} z \in [0, 1]\},$$

vilken blir då funktionens värdemängd $V_f$? (2p)

*Lösning*:
Sätt $z = x + yi$. Då är $f(z) = e^{\pi x + i\pi y} = e^{\pi x} \cdot e^{i\pi y}$, dvs $|f(z)| = e^{\pi x}$ och $\arg f(z) = \pi y$. Det betyder att $0 < |f(z)| < \infty$ och $0 \leq \arg f(z) \leq \pi$. $V_f$ är alltså hela det övre halvplanet inklusive $x$-axeln utom origo, eller på formelspråk $V_f = \{w = a + ib : b \geq 0, w \neq 0\}$.