TEKNISKA HÖGSKOLAN
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING
T. Ivanov

TENTAMEN TTSB18
Transform & Stat (7,5 hp)
2009-03-16, 08:00–13:00

Hjälpmedel: Av institutionen utskrivet formelblad (delas ut i tentamenssalen). Ej räknedosa!

Betygsgränser:

Poäng	20–25	15–19	10–14	0–9
Betyg	5	4	3	U

Jour: T. Ivanov (ankn. 16 23, 0709-20 36 11)

Bonusregler: De under VT09 intjänade bonuspoängen tillgodoräknas till fullo. Man hoppar över så många på varandra följande uppgifter (med start från uppgift 1) som bonuspoängen täcker och detta markeras med ett '**B**' i respektive ruta på omslaget. Sedan börjar man lösa tentan från första uppgiften man inte har tillräckligt med bonuspoäng att 'betala' fullt pris för. **Obs!** *Lösningar till uppgifter som täcks helt av bonuspoängen beaktas ej och bidrar därmed inte till tentamensresultatet.*
Lösningsförslag publiceras efter skrivningen på kursens hemsida `http://www.aragorn.hj.se/~ivtj/kurser/tr`

1. Jack och Jill har samlat 10 svampar i skogen, varav 3 st är giftiga dubbelgångare. Ovetandes om detta, äter Jack 6 svampar och Jill resterande 4. Beräkna sannolikheterna
   a) P(Jack blir förgiftad); (1 p)
   b) P(Jill blir förgiftad); (1 p)
   c) P(båda blir förgiftade). (1 p)

2. Bestäm laplacetransformen av funktionen (2 p)
$$f(t) = [3\cos(2t) - 2\sin(3t)]e^{-t}.$$

3. Låt $f(t) = \sin(t)\cos(2t)$. Använd proper entydighetssats samt kända utvecklingar för att bestämma
   a) maclaurinpolynomet av ordning 3 för f; (3 p)
   b) fourierserien för f på komplex form; (2 p)
   c) fourierserien för f på reell form. (1 p)
   d) Använd Parsevals formel för att beräkna signalens enohmsenergi (1 p)
$$\|f\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t)\cos^2(2t)\,dt.$$
   Hur stor del av signalens energi svarar likströmskomponenten för?

4. Bestäm fouriertransformen av signalen (2 p)
$$f(t) = e^{-3t}\cos(2t)\,\theta(t).$$

5. Pers och Olofs månadsutgifter i kronor kan betraktas som normalfördelade stokastiska variabler ξ, resp. η, så att $\xi \in N(7200, 300)$ och $\eta \in N(7600, 400)$. Bestäm sannolikheten att, under en slumpvis vald månad, Pers utgifter blir större än Olofs. (2 p)

6. På 1950-talet i USA gjorde man undersökningar om generationsskifte i inkomstnivåer. Man delade in löntagarna i låg-, medel- och höginkomsttagare (L,M resp. H) och fann att sannolikheten att ett barn hamnar i kategori H är 0.45 om föräldrarna är i kategori H, 0.05 om föräldrarna är i kategori M och endast 0.01 om föräldrarna var i kategori L. Antag att den undersökta generationens föräldrar består av 10 % höginkomsttagare, 40 % medelinkomsttagare och 50 % låginkomsttagare.
   a) Beräkna sannolikheten att ett barn med föräldrar från denna generation blir höginkomsttagare. (2p)
   b) Om ett barn till denna generation växer upp och blir höginkomsttagare, vad är sannolikheten att detta barns föräldrar själva var höginkomsttagare? (1p)

Var god vänd!

7. Man summerar 30000 slumpmässigt genererade flyttal *efter att först ha avrundat dem till heltal.* Avrundningsfelen ξ_k, $k = 1, \ldots, 30000$, kan antas vara oberoende rektangelfördelade stokastiska variabler på intervallet $]-0.5, 0.5[$. Använd den centrala gränsvärdessatsen för att genom en lämpligt vald normalfördeling uppskatta sannolikheten att

   a) summan av de avrundade talen överstiger den rätta summan med minst 75; (2 p)

   b) det totala summeringsfelet (i absolutbelopp) ej överstiger 50. (1 p)

   (En rektangelfördelad s.v. på $]-0.5, 0.5[$ har väntevärde $\mu = 0$ och standardavvikelse $\sigma = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.)

8. Summan $\eta = \xi_1 + \xi_2$ av två oberoende stokastiska variabler $\xi_1 \in Exp(\lambda_1)$ och $\xi_2 \in Exp(\lambda_2)$ med med täthetsfunktioner $f_k(x) = \lambda_k e^{-\lambda_k x}\theta(x)$, $k = 1, 2$, har täthetetsfunktion som ges av faltningen

$$f_\eta(x) = f_1 \star f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau.$$

   Då går det att bestämma f_η genom att inverstransformera produkten $F_1 F_2$ av laplacebilderna av f_1 och f_2, dvs,

$$f_\eta(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F_1(s)F_2(s)\right\}(x).$$

   a) Bestäm $f_\eta(x)$ om $\lambda_1 = 5$ och $\lambda_2 = 2$; (2 p)

   b) Bestäm $f_\eta(x)$ om $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. (1 p)

Lössningskiss för tentan i TTSB18 Transform & Stat (7,5 hp), 2009-03-16.

1. Teckna med ξ och η antalen giftiga svampar som Jack, resp. Jill ätit upp. Då är

a) $P(\text{Jack förgiftad}) = P(\xi \geq 1) = 1 - P(\xi = 0) = \binom{7}{6}\binom{3}{0}/\binom{10}{6} = 7 \cdot 1/\binom{10}{4} = 1 - 7 \cdot \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{10\cdot9\cdot8\cdot7} = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$.

b) $P(\text{Jill förgiftad}) = P(\eta \geq 1) = 1 - P(\eta = 0) = \binom{7}{4}\binom{3}{0}/\binom{10}{4} = 1 - \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3} \cdot \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{10\cdot9\cdot8\cdot7} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

c) $P(\text{båda förgiftade}) = P(1 \leq \eta \leq 2) = \left[\binom{7}{3}\binom{3}{1} + \binom{7}{2}\binom{3}{2}\right]/\binom{10}{4} = \frac{35\cdot3+21\cdot3}{210} = \frac{4}{5}$.

Svar: Se ovan.

2. Användning av tabellerna ger

$$\mathcal{L}\left\{(3\cos(2t) - 2\sin(3t))e^{-t}\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{3\cos(2t) - 2\sin(3t)\right\}(s+1). = \left[3\frac{s}{s^2+2^2} - 2\frac{3}{s^2+3^2}\right]_{s\to s+1}.$$

Svar: $\dfrac{3(s+1)}{s^2+2s+5} - \dfrac{6}{s^2+2s+10}$.

3. a) $f(t) = \sin(t)\cos(2t) = [t - \dfrac{t^3}{3!} + \mathcal{O}(t^5)][1 - \dfrac{(2t)^2}{2!} + \mathcal{O}(t^4)] = t - (2 + \frac{1}{6})t^3 + \mathcal{O}(t^5)$;

b) $f(t) = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\dfrac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} = \dfrac{1}{4i}(e^{3it} - e^{it} + e^{-it} - e^{-3it})$;

c) $f(t) \overset{b)}{=} \dfrac{1}{2}\dfrac{e^{3it} - e^{-3it}}{2i} - \dfrac{1}{2}\dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \dfrac{1}{2}\sin(3t) - \dfrac{1}{2}\sin(t)$.

Signalens enohmsenergi per period $T = 2\pi$ ges av

$$\|f\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2\,dt = \sum_{-\infty}^{\infty}|c_k|^2 \overset{b)}{=} \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{1}{4}.$$

Likstömsbidraget till energin ges av koefficienten $c_0^2 = 0$.

Svar: a) $t - \dfrac{13}{6}t^3$; b,c) Se ovan; d) $\dfrac{1}{4}$, resp. 0.

4. Användning av tabellerna ger

$$\mathcal{F}\left\{e^{-3t}\cos(2t)\,\theta(t)\right\}(\omega) = \frac{1}{2}[\hat{f}(\omega+2) + \hat{f}(\omega-2)], \text{ där } \hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\left\{e^{-3t}\,\theta(t)\right\}(\omega) = \frac{1}{3+i\omega}.$$

Svar: $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3+i(\omega+2)} + \dfrac{1}{3+i(\omega-2)}\right]$.

5. Utgiftsskillnaden $\eta - \xi \in N(7600-7200, 100\sqrt{3^2+4^2}) = N(400, 500)$. Då är $P(\text{Per spenderar mer än Olof})$:

$$P(\eta < \xi) = P(\eta - \xi < 0) = \Phi\left(\frac{0-400}{500}\right) = \Phi(-0.8) = 1 - \Phi(0.8) \approx 1 - 0,788.$$

Svar: Ca 21,2 %

6. a) Låt H(ög), M(edel) och L(åg), resp. h(ög), m(edel) och l(åg) beteckna tillhörigheten av FÖRÄDRAR-, respektive barngenerationen till respektive grupp. Då är sannolikheten (i %)

$$\begin{aligned} P(h) &= P(h\cap H) + P(h\cap M) + P(h\cap L) \\ &= P(h|H)P(H) + P(h|M)P(M) + P(h|L)P(L) \\ &= 0,45\cdot10 + 0,05\cdot40 + 0,01\cdot50 = 4,5 + 2 + 0,5 = 7\,\% \end{aligned}$$

b) Om barnet är själv höginkomsttagare, så är betingade sannolikheten att även dess föräldrar är höginkomsttagare

$$P(H|h) = \frac{P(h\cap H)}{P(h)} = \frac{P(h|H)P(H)}{P(h)} = \frac{0,45\cdot10}{7} \approx 0,64.$$

Svar: a) 7 %; b) ca 64 %.

7. Låt $\xi = \sum_{k=1}^{30000}\xi_k$. Enl CGVS är $\xi \,\widetilde{\in}\, N(0, \frac{\sqrt{30000}}{2\sqrt{3}}) = N(0, 50)$. Då är

$$\text{a) } P(\xi > 75) = 1 - P(\xi \leq 75) \approx 1 - \Phi(\tfrac{75}{50}) = 1 - \Phi(1,5);$$

b) $P(|\xi| < 50) = P(\xi > -50) + P(\xi < 50) \approx \Phi(-1) + \Phi(1) = 2\Phi(1) - 1$.

Svar: a) ca 6,7 % b) ca. 68 %.

8. a) Laplace-bilderna av täthetsfunktionerna ges av

$$F_k(s) = \mathcal{L}\left\{\lambda_k e^{-\lambda_k x}\theta(x)\right\}(s) = \lambda_k \mathcal{L}\left\{e^{-\lambda_k x}\theta(x)\right\}(s) = \frac{\lambda_k}{s+\lambda_k}, \quad k = 1, 2.$$

Då fås för $\lambda_1 = 5$ och $\lambda_2 = 2$

$$f_\eta(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+2}\cdot\frac{5}{s+5}\right\}(x) = \{\text{PBU}\} = \frac{10}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+5}\right\}(x) = \frac{10}{3}[e^{-2x} - e^{-5x}]\theta(x).$$

b) Om $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, så är

$$f_\eta(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9}{(s+3)^2}\right\}(x) = 9e^{-3x}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(x) = 9xe^{-3x}\theta(x).$$

Svar: a) $\frac{10}{3}[e^{-2x} - e^{-5x}]\theta(x)$; b) $9xe^{-3x}\theta(x)$.