TEKNISKA HÖGSKOLAN
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING

Tjavdar Ivanov (tel. 10 16 23, 0709-20 36 11)

TENTAMEN TTSB18
Tansform & Stat (7,5 hp)
2010-03-20, 08:00–13:00

Hjälpmedel: Av institutionen utskrivet formelblad (delas ut i tentamenssalen). Ej räknedosa!

Betygsgränser:

Poäng	20–25	15–19	10–14	0–9
Betyg	5	4	3	U

Points	23–25	20–22	16–19	13–15	10–12	7–9	0–6
ECTS	A	B	C	D	E	FX	F

Bonusregler: De under VT10 intjänade bonuspoängen tillgodoräknas till fullo. Man hoppar över så många på varandra följande uppgifter (med start från uppgift 1) som bonuspoängen täcker och detta markeras med ett '**B**' i respektive ruta på omslaget. Sedan börjar man lösa tentan från första uppgiften man inte har tillräckligt med bonuspoäng att 'betala' fullt pris för. **Obs!** *Lösningar till uppgifter som täcks helt av bonuspoängen beaktas ej och bidrar därmed inte till tentamensresultatet.*

Lösningsförslag publiceras efter skrivningen på kursens hemsida `http://www.aragorn.hj.se/~ivtj/kurser/tr`

1. Använd den geometriska serien för att visa likheten (2 p)

$$\frac{1-z}{1+z} = 1 - 2z + 2z^2 - 2z^3 + \cdots = 1 + 2\sum_1^{\infty}(-1)^k z^k, \quad |z| < 1.$$

2. Antalet anrop till kundcentret av ett stort försäkringsbolag antas vara poissonfördelat med ett väntevärde på 1600 anrop/dygn. Använd den centrala gränsvärdessatsen för att uppskatta sannolikheten att under ett visst dygn antalet anrop överstiger 1700. (2 p)

3. Den stokastiska variabeln ξ har sannolikhetsfunktionen $f(t) = \beta\, e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$. Bestäm β samt väntevärdet $\mu = E(\xi)$ och standardavvikelsen σ för ξ. (2 p)

   Tips: Uppgiften löses snabbast om du inser (och motiverar) att $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 2\beta\mathcal{L}\{1\}(1)$ samt att $E(\xi^2) = 2\beta\mathcal{L}\{t^2\}(1)$ (betecknigen $\mathcal{L}\{g\}(1)$ avser laplacetransformen av f-nen g beräknat i $s = 1$).

4. De flesta rättsystem bygger på principen *hellre fria än fälla*. Det händer trots allt att oskyldiga ibland döms. Antag att bland de åtalade är 70% verkligen skyldiga och att sannolikheten att en skyldig döms är 60%, medan sannolikheten att en oskyldig döms är så liten som 0,5%. Hur stor andel av de dömda kommer i så fall att vara oskyldigt dömda? (2 p)

5. Kalle har 2 blå kulor, Pelle — tre vita och Stolle — fyra röda. De blå kulornas vikt i gram ξ_1 anses normalfördelad, så att $\xi_1 \in N(4,2)$, de vitas vikt $\xi_2 \in N(5,2)$ och slutligen de röda kulornas vikt $\xi_3 \in N(6,2)$. Beräkna sannolikheten att den sammanlagda vikten av alla de 9 kulorna som grabbarna har överstiger 55 g. (2 p)

6. Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 3 till funktionen $e^{-2x}[1 + \ln(1+x)]$. (3 p)

7. Bestäm Fouriertransformen av funktionerna
   a) $f(t) = te^{-t^2}$; (2 p)
   b) $g(t) = te^{-t^2}\sin(3t)$. (1 p)

8. Kalle sätter (dvs kastar bollen i korgen) varje enskilt straffkast i basketboll med sannolikhet 80%. Antag också att Kalle lyckas/misslyckas varje gång oberoende av de föregående kast.
   a) Bestäm sannolikheten att Kalle sätter mellan 5 och 8 av 10 kast. (1 p)
   b) Bestäm sannolikheten att han missar minst 3 gånger av 10. (1 p)
   c) Ange det lägsta antalet kast Kalle måste göra för att med 95% sannolikhet lyckas 10 gånger? (1 p)

9. Bestäm den funktion $g(t)$ vars laplacebild är (3 p)

$$\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{5s^2 + 4s + 3}{(s+1)(s^2+1)}\, e^{-\pi s}.$$

Var god vänd!

10. Använd entydighetssatsen för fourierserier för att snabbt ta fram fourierserien för funktionen (3 p)

$$f(t) = \frac{3}{5 + 4\cos(t)}.$$

Tips: Visa att $f(t)$ utgör den reala delen av funktionen $\dfrac{2 - e^{it}}{2 + e^{it}}$, $t \in \mathbb{R}$. Använd sedan resultatatet i uppgift 1 för lämpligt valt z.

Lössningskiss för tentan i TTSB18 Tansform & Stat (7,5 hp), 2010-03-20.

1. För alla komplexa z inom enhetscirkeln (dvs med $|z| < 1$) gäller att $1/(1+z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$. Då är

$$\begin{aligned}\frac{1-z}{1+z} &= (1-z)(1-z+z^2-z^3+\cdots)\\ &= 1-z+z^2-z^3+\cdots - z(1-z+z^2-z^3+\cdots)\\ &= 1-2z+2z^2-2z^3+\cdots.\end{aligned}$$

---

2. Eftersom $\lambda > 15$, så uppskattas, enligt CGS, $Exp(\lambda) \approx N(\lambda, \sqrt{\lambda})$. Om man tecknar den s.v. ξ – antalet anrop per dygn, så är $\xi \in Exp(1600) \approx N(1600, 40)$. Det sökta sannolikheten ges då av

$$P(\xi > 1700) = 1 - P(\xi \le 1700) \approx 1 - \Phi\left(\frac{1700-1600}{40}\right) = 1 - \Phi(2,5) \approx 1 - 0,994. \qquad \boxed{\textbf{Svar: } \text{Ca } 0,6\%.}$$

---

3. Klart att $f(x) > 0$. För att f skall vara en giltig sannolikhetsfunktion, återstår att säkra att sannolikhetsmassan (dvs arean) under f är 1, dvs,

$$1 = \beta\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}\,dt = 2\beta\int_0^{\infty} e^{-t}\,dt = 2\beta\mathcal{L}\{1\}(1) = 2\beta\left[\frac{1}{s}\right]_{s=1} = 2\beta \Longrightarrow \beta = \frac{1}{2}\cdot$$

Eftersom f är jämn, så är pga av symmetrin $\mu = E(\xi) = 0$. Slutligen är

$$V(\xi) = E[(\xi-\mu)^2] = E(\xi^2) = \beta\int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-|t|}\,dt = 2\beta\int_0^{\infty} t^2e^{-t}\,dt = 2\cdot\frac{1}{2}\mathcal{L}\{t^2\}(1) = \left[\frac{2!}{s^3}\right]_{s=1} = 2.$$

$$\boxed{\textbf{Svar: } \beta = \frac{1}{2},\ \mu = 0,\ \sigma = \sqrt{2}.}$$

---

4. Inför beteckningarna S för skyldig (och därmed S^c för oskyldig) samt D för dömd. Givet är $P(D|S) = 60\%$, $P(D|S^c) = 1\%$ samt att $P(S) = 70\% \iff P(S^c) = 30\%$. Då ges den sökta andelen oskyldigt dömda av den betingade sannolikheten

$$P(S^c|D) = \frac{P(S^c\cap D)}{P(D)} = \frac{P(S^c\cap D)}{P(S^c\cap D) + P(S\cap D)}.$$

Nu är $P(S^c\cap D) = P(D|S^c)P(S^c)$ samt $P(S\cap D) = P(D|S)P(S)$, dvs

$$P(S^c|D) = \frac{P(D|S^c)P(S^c)}{P(D|S^c)P(S^c) + P(D|S)P(S)} = \frac{0,5\cdot 30}{0,5\cdot 30 + 60\cdot 70}. \qquad \boxed{\textbf{Svar: } \frac{3}{843} \approx 0,0036 = 0,36\%.}$$

---

5. Teckna med η de sammanlagda vikten av de 9 kulorna och då (observera att $\eta \ne 3\xi_1 + 4\xi_2 + 5\xi_3$!)

$$\eta = \underbrace{\xi_{11}+\xi_{12}}_{\text{2 st blå}} + \underbrace{\xi_{21}+\xi_{22}+\xi_{23}}_{\text{3 st vita}} + \underbrace{\xi_{31}+\xi_{32}+\xi_{33}+\xi_{34}}_{\text{4 st röda}} \in N(2\cdot 4 + 3\cdot 5 + 4\cdot 6\,,\ \sqrt{9\cdot 2^2}) = N(47\,,\,6).$$

Då är $P(\eta > 55) = 1 - P(\eta \le 55) = 1 - \Phi\left(\frac{55-47}{6}\right) = 1 - \Phi(\frac{4}{3})$. $\boxed{\textbf{Svar: } \text{Ca } 9{,}2\%.}$

6.

$$\begin{aligned} e^{-2x}[1+\ln(1+x)] &= [1 - \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^3}{3!} + \mathcal{O}(x^4)][1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)]\\ &= [1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4)][1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)]\\ &= 1 + (1-2)x + (-\frac{1}{2} - 2 + 2)x^2 + (-\tfrac{4}{3} + 1 + 2 + \tfrac{1}{3})x^3 + \mathcal{O}(x^4)\end{aligned}$$

$$\boxed{\textbf{Svar: } 1 - x - \tfrac{1}{2}x^2 + 2x^3.}$$

---

7. a) Först bestämmer man att $e^{-t^2} \stackrel{\mathcal{F}}{\to} \sqrt{\pi}\,e^{-\omega^2/4}$. Sedan antingen använder man att $f(t) = -\frac{1}{2}[e^{-t^2}]'$, så

$$\mathcal{F}\left\{te^{-t^2}\right\}(\omega) = -\frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{[e^{-t^2}]'\right\}(\omega) = -\frac{i\omega}{2}\mathcal{F}\left\{e^{-t^2}\right\}(\omega) = -\frac{i\omega\sqrt{\pi}}{2}e^{-\omega^2/4}$$

eller använeder man att $\mathcal{F}\{-itf(t)\}(\omega) = \hat{f}'(\omega) \iff \mathcal{F}\{tf(t)\}(\omega) = i\hat{f}'(\omega)$, och da fås samma resultat genom

$$\mathcal{F}\left\{te^{-t^2}\right\}(\omega) = i\left[\mathcal{F}\left\{e^{-t^2}\right\}(\omega)\right]' = i\sqrt{\pi}\,[e^{-\omega^2/4}]' = -\frac{i\omega\sqrt{\pi}}{2}e^{-\omega^2/4}.$$

$$\boxed{\textbf{Svar: } \text{a) } -\frac{i\omega\sqrt{\pi}}{2}e^{-\omega^2/4};\qquad \text{b) } \frac{1}{2i}[\hat{f}(\omega+3) - \hat{f}(\omega-3)] = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}[(\omega+3)e^{-(\omega+3)^2/4} - (\omega-3)e^{-(\omega-3)^2/4}].}$$

---

8. Teckna ξ och η antalet lyckade, resp, misslyckade kast.
a) Vi har att $\eta \in Bin(10, 0.2)$. Den sökta sannolikheten är

$$P(5 \le \xi \le 8) = P(2 \le \eta \le 5) = F_\eta(5) - F_\eta(1) \approx 99,4\% - 37,6\% = 61,8\%.$$

b) $P(\eta \ge 3) = 1 - P(\eta < 3) = 1 - P(\eta \le 2) \approx 100\% - 67,8\% = 32,2\%.$
c) Låt antalet försök vara n. Söker den fördelningen $Bin(n, 0.2)$ med fördelningsfunktion F_n, sådan att

$$P(\xi \ge 10) = P(\eta \le n - 10) = F_n(n - 10) \ge 95\%$$

Man tittar med andra ord på den växande följden $F_{10}(10), F_{11}(1), F_{12}(2), \cdots$, tills värdet överstiger 95%. Den första värdet som satisfierar detta villkor är

$$F_{16}(6) = P(\text{högst 6 misslyckade av 16}) = P(\text{minst 10 lyckade av 16}) = 97,3\%.$$

(jfr med föregående värdet $F_{15}(5) = 93,9\% < 95\%$).

Svar: a) $61,8\%$; b) $32,2\%$; c) 16 kast.

---

9. Döp den rationella funktionen till $h(s)$. Partialbråksuppdelning ger

$$h(s) = \frac{5s^2 + 4s + 3}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{2}{s+1} + \frac{3s+1}{s^2+1}.$$

Då är

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{h(s)\, e^{-\pi s}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{h\}(t-\pi)\theta(t-\pi), \quad \text{där } \mathcal{L}^{-1}\{h\}(t) = 2e^{-t} + 3\cos(t) + \sin(t).$$

Svar: $[2e^{-(t-\pi)} + 3\cos(t-\pi) + \sin(t-\pi)]\theta(t-\pi)$.

---

10. Teckna $g(t) = \dfrac{2 - e^{it}}{2 + e^{it}}$. Förlängning med konjugaten ger

$$g(t) = \frac{(2 - e^{it})(2 + e^{-it})}{|2 + e^{it}|^2} = \frac{3 - 2(e^{it} - e^{-it})}{5 + 4\cos(t)} = \frac{3 - 4i\sin(t)}{5 + 4\cos(t)},$$

dvs verkligen $f(t) = \mathrm{Re}[g(t)]$. Med $z = e^{it}/2$ (observera att $|z| = 1/2 < 1$), g kan skrivas som

$$g(t) = \left[\frac{1-z}{1+z}\right]_{z=e^{it}/2} = \left[1 - 2z + 2z^2 - 2z^3 + \cdots\right]_{z=e^{it}/2} = 1 - e^{it} + \frac{e^{2it}}{2} - \frac{e^{3it}}{2^2} + \cdots.$$

Tag nu realdel.

Svar: $f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(kt)}{2^{k-1}} = 1 - \cos(t) + \frac{\cos(2t)}{2} - \frac{\cos(3t)}{4} + \cdots$
