**Tentamen i Linjär algebra, 7,5hp, 2009-10-17**
**Tid:** 08:00–13:00
**Hjälpmedel:** Formelblad
**Examinator:** Anders Andersson, Kenneth Hulth
**Telefon:** 070-7770323, 070-3159580

TEKNISKA HÖGSKOLAN
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING

---

**Fullständiga lösningar och tydliga motiveringar krävs för samtliga uppgifter**

1. Fyra av de fem punkterna $P_1 = (1,1,0)$, $P_2 = (3,2,-1)$, $P_3 = (-1,0,1)$, $P_4 = (-3,-1,4)$ och $P_5 = (5,3,-2)$ ligger på linjen $L$. Vilken av punkterna ligger *inte* på $L$? (2p)

2. Är vektorerna $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}4\\3\\0\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\3\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\3\\3\end{pmatrix}$ linjärt beroende? (2p)

3. Lös matrisekvationen $A(B^t + CX) = B$, där $A = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix}2 & 4\\-1 & -3\end{pmatrix}$. (2p)

4. (a) Visa att linjerna

$$L_1 : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \text{och } L_2 : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

skär varandra och bestäm deras skärningspunkt. (2p)

(b) Under vilken vinkel skär linjerna varandra? (1p)

(c) Linjerna $L_1$ och $L_2$ ligger i planet $\Pi$. Visa att linjen

$$L_3 : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$$

är parallell med $\Pi$ och bestäm avståndet mellan $L_3$ och $\Pi$. (2p)

5. Finns det något värde på konstanten $a$ för vilket ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + az = 2a \\ x + 3y + 2az = 12 \\ 2x + ay + 8z = 16 \end{cases}$$

saknar lösning? (3p)

6. En linjär avbildning avbildar rummets ($\mathbb{R}^3$:s) punkter genom att projicera dem på planet $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = t_1\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Bestäm avbildningsmatrisen för denna avbildning. (3p)

7. Diagonalisera matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, dvs bestäm in inverterbar matris $P$ och en diagonalmatris $D$ så att $D = P^{-1}AP$. (3p)

8. Låt $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Visa först att vektorerna

$$\boldsymbol{e}'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}'_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

är en annan bas i $\mathbb{R}^3$ och skriv sedan vektorn $\boldsymbol{u} = 4\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3$ i basen $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$. (3p)

9. Sträckan $AB$ är diameter i en cirkel med medelpunkt $M$. Punkten $C$ ligger på cirkelns rand. Visa med vektorräkningar att vektorerna $\overrightarrow{AC}$ och $\overrightarrow{BC}$ är ortogonala. (2p)