

Tentamen i Matematisk analys, 7,5hp, 2010-01-14

Tid: 08:00–13:00

Hjälpmedel: Formelblad

Examinator: Fredrik Abrahamsson

Telefon: 036-101620



TEKNISKA HÖGSKOLAN
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING

Fullständiga lösningar och tydliga motiveringar krävs för samtliga uppgifter

Del A

1. Lös ekvationen $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ fullständigt. En lösning är $x = -2$. (2p)

2. Låt $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$. Bestäm $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ och $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Existerar gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$? (2p)

3. Bestäm den primitiva funktion $F(x)$ till $f(x) = \sin(x)\sqrt{2\cos(x) + 1}$ som uppfyller $F(0) = 0$. (2p)

4. Lös för $x > 0$ differentialekvationen (3p)

$$y' + \frac{1}{x}y = \cos(x)$$

5. Lös differentialekvationen (3p)

$$y'' + 2y' + y = -2e^{-4x}$$

6. Rita kurvan $y = \frac{2x^3 + x^2 - 4}{x^2 - 4}$ med angivande av samtliga extrempunkter och eventuella asymptoter. (3p)

Del B

7. Låt $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^x + 2x + 1$. Bestäm det minsta talet a så att $f(x)$ blir inverterbar på intervallet $[a, \infty[$. För vilka x är funktionen $f^{-1}(x)$ definierad då? (3p)

8. Vatten fylls på i en konisk tank med 1 kubikmeter per minut. Tanken har höjden 9 m och toppradien är 3 m. Hur snabbt stiger vattenhöjden i tanken när man har hållt i 2 m³ vatten? (Volymen av en kon med radien r och höjden h är $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.) (3p)

9. Antag att $f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$. Beräkna gränsvärdet (2p)

$$\lim_{a \rightarrow 2} \frac{f(2a) - f(4)}{a - 2}$$

10. Antag att $f(x)$ är kontinuerlig för $x \geq 0$, deriverbar för $x > 0$ och att $f(0) = 0$. Visa att om $f'(x)$ är en växande funktion för $x > 0$ så är även $\frac{f(x)}{x}$ en växande funktion för $x > 0$. (2p)