Tentamen i Linjär algebra IL, 7,5hp, 2010-06-05
Tid: 12:00–17:00
Hjälpmedel: Formelblad
Examinator: Anders Andersson
Telefon: 070-7770323

TEKNISKA HÖGSKOLAN
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING

Fullständiga lösningar och tydliga motiveringar krävs för samtliga uppgifter

1. Undersök om linjerna

$$L_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ och } L_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

skär varandra, och bestäm i så fall skärningspunkten. (2p)

2. För vilka värden på p ligger punkterna $(1, 2, p)$, $(2, -1, -p)$, $(3, 0, 1)$ och $(p-1, 2, 0)$ i samma plan? (2p)

3. Beräkna avståndet mellan linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ och punkten $(5, -1, 3)$. (2p)

4. Punkten $P = (1, 3, 4)$ speglas i planet $2x + y + z = 3$. Bestäm spegelbildens läge. (3p)

5. Låt $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vektorn $\boldsymbol{v}_1$ är en egenvektor med egenvärdet 1 till den linjära avbildningen $F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$. Vidare är $F(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_3$ och $F(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_2$. Bestäm avbildningsmatrisen A. (3p)

6. Finn samtliga egenvektorer och deras respektive egenvärden till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 2 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$ (3p)

7. Lös följande optimeringsproblem med simplexmetoden: (3p)

$$\begin{array}{llcrcrcl}
\text{Maximera} & 21x_1 & + & 8x_2 & + & 11x_3 & & \\
\text{då} & 7x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 14 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 9 \\
 & & & & & x_k & \geq & 0, \quad k = 1, \dots, 3
\end{array}$$

8. Optimeringsproblemet

$$\begin{array}{llllllll}
\text{Maximera} & 7x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & & \\
\text{då} & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 677 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 371 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & \leq & 496 \\
 & & & & & x_k & \geq & 0, \quad k = 1, \ldots, 3
\end{array}$$

har lösts med simplexmetoden, där den optimala lösningen framgår ur följande sluttablå:

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
z	1	0	0	7	1	0	2	1669
s_2		0	0	-5	1	1	-2	56
x_1		1	0	-6	3	0	-4	47
x_2		0	1	5	-2	0	3	134

Det maximala målfunktionsvärdet är alltså 1669 då $x_1 = 47$, $x_2 = 134$ och $x_3 = 0$.

(a) Hur ändras det maximala målfunktionsvärdet om värdet 496 i det ursprungliga problemets högerled ökas till 497? (1p)

(b) Mellan vilka gränser kan värdet 496 ändras, utan att vi får en helt annan optimallösning med andra basvariabler? (1p)

(c) Mellan vilka gränser kan koefficienten 10 i målfunktionen ändras, utan att vi får en helt annan optimallösning med andra basvariabler? (1p)

9. Vektorerna $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ har samma längd. Visa att $\boldsymbol{u}$ är ortogonal mot $\boldsymbol{v}$. (2p)

10. En linjär avbildning F projicerar rummets vektorer på ett visst plan genom origo. Man vet att $F\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$. Bestäm alla möjliga värden på konstanten a. (2p)