Tentamen i Linjär algebra IL, 7,5hp, 2010-03-23
Tid: 12:00–17:00
Hjälpmedel: Formelblad
Examinator: Anders Andersson
Telefon: 101621

TEKNISKA HÖGSKOLAN
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING

Fullständiga lösningar och tydliga motiveringar krävs för samtliga uppgifter

1. Bestäm skärningslinjen mellan planen $3x - 2y + z = 5$ och $2x + y - z = 4$. (2p)

2. Beräkna det kortaste avståndet mellan linjerna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. (2p)

3. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + 3y + 2z = 1 \\ 2x + ay + z = 3 \\ 2x + (a+1)y + 2z = 1 \end{cases}$$

för alla värden på a som ger systemet oändligt många lösningar. (3p)

4. Bestäm avbildningsmatrisen för den linjära avbildning som avbildar $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. (3p)

5. Bestäm samtliga egenvektorer och deras respektive egenvärden till matrisen $A = \begin{pmatrix} -5 & 10 & -2 \\ -3 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (3p)

6. Lös LP-problemet

$$\begin{array}{llcrcrcrl} \text{Maximera} & -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & \\ \text{då} & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 10 & \\ & x_1 & & & + & 2x_3 & \geq & 5 & \\ & & & & & x_k & \geq & 0 & k = 1, \ldots, 3 \end{array}$$

med hjälp av Simplexmetoden. (3p)

7. LP-problemet

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{Maximera} & 15x_1 & + & 22x_2 & + & 30x_3 & & \\
\text{då} & 80x_1 & + & 120x_2 & + & 200x_3 & \leq & 2400 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 20 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & \leq & 10 \\
 & & & & & x_k & \geq & 0 \quad k = 1, \ldots, 3
\end{array}
$$

har lösts med Simplexmetoden med följande sluttablå:

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
z	1	1	0	0	$\frac{3}{20}$	0	4	400
x_3		$-\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{1}{200}$	0	$-\frac{3}{5}$	6
s_2		$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{1}{200}$	1	$-\frac{2}{5}$	4
x_2		1	1	0	0	0	1	10

dvs det maximala målfunktionsvärdet är alltså 400 då $x_1 = 0$, $x_2 = 10$ och $x_3 = 6$. Använd sluttablån för att besvara följande frågor:

(a) Hur ändras det optimala målfunktionsvärdet om värdet 2400 i högerledet i det ursprungliga problemet ökas till 2401? (1p)

(b) Mellan vilka gränser kan värdet 2400 ändras, utan att vi får en helt annan optimallösning med andra basvariabler? (1p)

(c) Mellan vilka gränser kan koefficienten 30 i målfunktionen ändras, utan att vi får en helt annan optimallösning med andra basvariabler? (1p)

8. Bestäm konstanterna a och b så att linjen

$$
\begin{cases}
x = a - t \\
y = 3 + bt \\
z = 1 - 2t
\end{cases}
$$

blir parallell med planet $x + y + z = 2$ och ligger på avståndet $\sqrt{3}$ från detta plan. (3p)

9. En triangel med arean 3 (a.e.) ligger i planet $2x - y - 2z + 1 = 0$. Två av triangelns hörn är $A = (2, 3, 1)$ och $(3, 1, 3)$. Bestäm alla möjliga lägen för triangelns tredje hörn C. (3p)