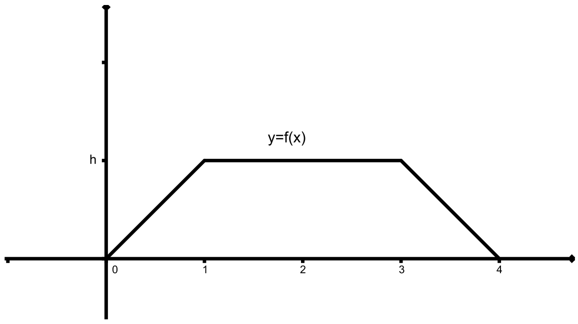
Lösningsförslag Tentamen Matematisk statistik 100603
Tid: 12.00-17.00
Telefon: 036-101620,
Examinator: F Abrahamsson

TEKNISKA HÖGSKOLAN
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING

1. Betrakta alla 6-siffriga decimaltal $000000, 000001, \ldots, 999999$. Om vi väljer ett av dessa tal på måfå, vad är sannolikheten att samtliga siffror i talet är olika? (2p)

   Lösning: $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{10^6} \approx 0.15.$

2. Figuren nedan visar frekvensfunktionen för en kontinuerlig stokastisk variabel ξ som beskriver den tid i minuter det tar att byta glödlampa på en viss bilmodell.



   (a) Beräkna sannolikheten att det tar högst 1.72 minuter att byta lampan. (2p)

   (b) Beräkna den förväntade tiden det tar att byta lampan. (1p)

   Lösning: (a) Kravet $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ betyder att $h \cdot \frac{1}{2} + h \cdot 2 + h \cdot \frac{1}{2} = 1$ dvs. $h = \frac{1}{3}$. Då är $P(\xi \leq 1.72) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0.72 \approx 0.41$.

   (b) Pga symmetri är $E(\xi) = 2$ minuter.

3. Om $\xi \in N(50, 3)$ och $\eta \in N(12, 1)$, beräkna $P(\xi > 4\eta)$. (2p)

   Lösning: Vi får att $\xi - 4\eta \in N(50 - 4 \cdot 12, \sqrt{3^2 + 4^2 \cdot 1})$ dvs. $\xi - 4\eta \in N(2, 5)$. Då är

$$P(\xi > 4\eta) = P(\xi - 4\eta > 0) = \Phi\left(\frac{0-2}{5}\right) = \Phi(-0.4) = 1 - \Phi(0.4) \approx 0.34.$$

4. Man undersökte 725 st glas av samma typ och fann att 92 av dessa hade förekomster av luftbubblor.

   (a) Bestäm ett konfidensintervall med approximativ konfidensgrad 95% för andelen p av glasen som har luftbubblor. (2p)

   (b) Om vi inte har någon som helst kunskap om p, hur stort stickprov av glas måste undersökas om man med 95% säkerhet vill uppskatta p med en felmarginal på högst 0.03? (2p)

   Lösning: (a) Med $n = 725$, $p^* = \frac{92}{725} \approx 0.127$ och $\lambda_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$ fås ett approximativt konfidensintervall

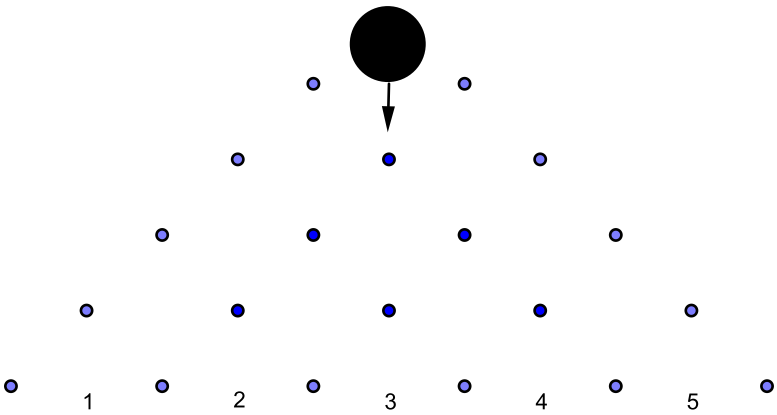
$$I_p = p^* \pm \lambda_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} \approx [0.102, 0.152]$$

   (b) Med uppskattningen $p^*(1-p^*) \leq \frac{1}{4}$ söker vi n så att

$$E = |p - p^*| = \lambda_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} \leq \lambda_{\alpha/2}\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq 0.03$$

   vilket ger $n \geq 1068$.

5. Nedanstående figur visar ett spel där man släpper en kula som får falla mellan skikt av piggar. Varje gång kulan stöter på en pigg så är det 50% sannolikhet att den väljer den vänstra vägen och dito för den högra. Beräkna sannolikheten att kulan faller ned i fack nummer 4. (2p)



Lösning: Låt ξ vara antalet högersteg som kulan tar och låt η vara antalet vänstersteg. Då är $\xi + \eta = 4$ (det är 4 piggar som kulan träffar) och $\xi \in Bin(4, \frac{1}{2})$. För att hamna i fack nummer 4 måste kulan ta precis 3 högersteg (och därmed precis 1 vänstersteg). Den sökta sannolikheten är därför

$$P(\xi = 3) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-3} = \frac{1}{4}.$$

6. Antag att en bonde köper in 10000 granplantor som avses att planteras ut. Höjden på dessa plantor i cm är $N(\mu, 10)$ där μ är leveransens genomsnittliga höjd. Bonden har betalat ett pris som är baserat på att μ är 70 cm (eller högre). För att kontrollera detta mäter bonden 100 plantor och får då den genomsnittliga höjden till $\overline{x} = 68$ cm.

   (a) Kan bonden underkänna leveransen om han är villig att ta en risk på 5% att göra fel? Besvara frågan genom att genomföra ett lämpligt hypotestest. (2p)

   (b) Om $\mu = 67$ cm, hur stor är sannolikheten att bonden underkänner leveransen? (2p)

Lösning: (a) Vi vill genomföra testet $H_0 : \mu = 70$ mot alternativhypotesen $H_1 : \mu < 70$ på signifikansnivån 5%. Med testvariabeln

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - 70}{10/\sqrt{100}}$$

så förkastar vi H_0 om $z_0 < -\lambda_{0.05} = -1.64$. Våra data ger $z_0 = -2$ dvs. vi förkastar H_0 på signifikansnivån 5% och underkänner alltså leveransen.

(b) Med $\mu = 67$ så är

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - 70}{10/\sqrt{100}} = \underbrace{\frac{\overline{X} - 67}{10/\sqrt{100}}}_{\sim N(0,1)} - \frac{3}{10/\sqrt{100}} \sim N(-3, 1).$$

Sannolikheten att förkasta H_0 är därför

$$P(Z_0 < -1.64 \mid Z_0 \in N(-3, 1)) = \Phi(-1.64 - (-3)) = \Phi(1.36) \approx 0.91.$$

7. Två maskiner A och B tillverkar enheter med normalfördelade tillverkningstider $N(\mu_A, \sigma)$ resp. $N(\mu_B, \sigma)$ (sekunder). För att jämföra medeltiderna μ_A och μ_B låter man maskinerna tillverka 6 enheter vardera och registrerar tiderna: (3p)

maskin A	12.37	12.32	12.41	12.34	12.23	12.36
maskin B	12.41	12.39	12.46	12.35	12.39	12.33

Bestäm ett 95% konfidensintervall för $\mu_A - \mu_B$.

Lösning: Vi får $\overline{x}_A = 12.3383$, $s_A = 0.0611$ och $\overline{x}_B = 12.3883$, $s_B = 0.0458$. Enligt formelbladet är

$$I_{\mu_A-\mu_B} = \overline{x}_A - \overline{x}_B \pm t_{0.025}(6+6-2)\sigma^*_{obs}\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}$$

där

$$\sigma^*_{obs} = \sqrt{\frac{(6-1)s_A^2 + (6-1)s_B^2}{6+6-2}} \approx 0.0540\,.$$

Med tabell fås $t_{0.025}(10) = 2.228$ vilket ger konfidensintervallet $I_{\mu_A-\mu_B} \approx [-0.120, 0.020]$

8. Man vill låta testa två olika bottenfärger för båtar och målar 18 båtar; halva botten målas med färg A och den andra halvan med färg B. Efter en säsong mäter man mängden alger som samlats på botten. Resultatet visas nedan.

Båt	Minst alger hade färg	Båt	Minst alger hade färg
1	A	10	B
2	A	11	A
3	A	12	A
4	B	13	A
5	A	14	A
6	B	15	A
7	A	16	A
8	A	17	A
9	A	18	A

(a) Genomför ett teckentest på signifikansnivån 1% för att testa om färg A är bättre än färg B. (2p)

(b) Med 18 testade båtar, vilken är den teoretiskt bästa signifikansnivån som man kan uppnå i ett teckentest? (1p)

Lösning: (a) Låt

$$\begin{aligned} H_0 &: \text{ färgerna är lika bra} \\ H_1 &: \text{ färg } A \text{ har mindre alger} \end{aligned}$$

Om $X_A - X_B$ är differensen i mängden alger mellan båtarna så är antalet negativa differenser $r_- = 15$. $P-$värdet är

$$P(R_- \geq 15 | R_- \in Bin(18, \frac{1}{2})) = \sum_{k=15}^{18} \binom{18}{k} \frac{1}{2^{18}} \approx 0.004$$

dvs. vi förkastar H_0 på signifikansnivån 1%.

(b) Det mest extrema $P-$värdet är

$$P(R_- = 18 | R_- \in Bin(18, \frac{1}{2})) = \frac{1}{2^{18}} \approx 0.000004.$$

9. Antag att $\xi \in R(0,1)$. Om $\lambda > 0$ låt $\eta = -\frac{1}{\lambda}\ln\xi$. Visa att då är $\eta \in Exp(\lambda)$. (2p)

Lösning: Fördelningsfunktionen för ξ ges av

$$P(\xi \leq x) = F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , x > 1 \end{cases}$$

Vi får därför att

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &= P(\eta \leq x) = P(-\frac{1}{\lambda}\ln\xi \leq x) = P(\ln\xi \geq -\lambda x) \\ &= P(\xi \geq e^{-\lambda x}) = 1 - P(\xi \leq e^{-\lambda x}) \\ &= 1 - F_\xi(e^{-\lambda x}) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Alltså är $\eta \in Exp(\lambda)$.