TEKNISKA HÖGSKOLAN
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING
Tjavdar Ivanov

TENTAMEN TMAB17
Analys i flera variabler
2008-05-26, 13:30–18:30

Jour: Tjavdar Ivanov (tel. 036–10 16 23, 0709–20 36 11)

Ange dina bonuspoäng. Markera uppgifterna som täcks av bonus med 'B' på omslaget.

Bonuspoängen adderas oavkortade till slutsultatet. Du hoppar över så många på varandra följande uppgifter med start från uppg. 1 som bonuspoängen täcker helt. Tentan löses från och med den första uppgift du inte har tillräckligt med bonus att 'betala' fullt pris för. Lösningar till uppgifter som täcks av bonuspoängen beaktas ej.

Betygskala (ECTS i tabellen till höger är för internationella studenter):

Poäng	20–25	15–19	10–14	0–9
Betyg	5	4	3	U

Points	23–25	20–22	16–19	13–15	10–12	7–9	0–6
ECTS	A	B	C	D	E	FX	F

1. Låt $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy^2, yz^2, zx^2)$. Ange vilka av de följande uttryck som har mening och beräkna dem: (2 p)

   a) $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{F})$ b) $\operatorname{div}(\nabla\times\mathbf{F})$ c) $\nabla\times(\operatorname{div}\mathbf{F})$.

2. En yta anges i närheten av punkten $A = (1,1,1)$ av funktionen $z = f(x,y) = \dfrac{4}{\pi}\arctan(\dfrac{y}{x})$. Ytan är gjord av plast och z-axeln anses vara lodrät orienterad.

   a) Bestäm tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten A. (2 p)

   b) I punkten A faller en droppe regn. I vilken riktning kommer droppen att rinna vidare från A? Ange även lutningen i denna riktning. (2 p)

3. Låt Ω vara den ändliga kroppen som begränsas av ytorna $S_1 : z = x^2+3y^2$ och $S_2 : z = 8-x^2+y^2$.

   a) Beräkna Ω:s volym. (2 p)

   b) Beräkna flödet av fältet $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy+z, y-y^2, x+yz)$ ut ur Ω. (2 p)

4. Bestäm värdet av den generaliserade dubbelintegralen (3 p)

$$\iint_S \frac{dxdy}{x\sqrt{y}}, \qquad S = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x^3\le y\le x\}.$$

5. Bestäm värdet av konturintegralen (3 p)

$$\oint_\gamma (\ln(1+x^2)+2y^3)\,dx - (x+\arctan y)\,dy$$

   moturs längs ellipsen $\gamma : x^2-2x+9y^2 = 0$.

6. Funktionen $z(x,y)$ anges implicit i närheten av punkten $(1,1,1)$ med ekvationen (3 p)

$$x\sqrt{y^2+3z^2} + \arctan(xyz) = 2+\frac{\pi}{4}\cdot$$

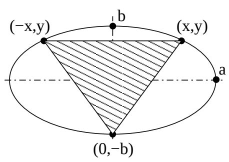
   Bestäm de partiella derivatorna $z'_x(1,1)$ och $z'_y(1,1)$.

7. Bestäm värdet av kurvintegralen (3 p)

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}, \quad \mathbf{F}(x,y,z) = \Big(-z\sin(xz)+\ln(1+y^2)\,,\; z\cos(yz)+\frac{2xy}{1+y^2}\,,\; y\cos(yz)-x\sin(xz)\Big),$$

   där γ är en godtycklig C^1-kurva från origo till punkten $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 1)$.

8. Bestäm de (x,y) för vilka den likbenta triangeln med hörn i punkterna $(0,-b)$, (x,y) och $(-x,y)$ inskriven i ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ får störst area. Ange även denna största area. (3 p)



Solutions sketch for the written exam in Analys i flera variabler , 2008-05-26.

1. **Svar**: a) $2(x,y,z)$; b) 0 (rotationen av varje C^2-fält är solenoidal); c) uttrycket saknar mening.

---

2. a) TP:s ekvation punkten $(1,1,1)$ ges av $z = 1 + f'_x(1,1)(x-1) + f'_y(1,1)(y-1)$. Gradienten fås ur

$$\nabla f(1,1) = \frac{4/\pi}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1)} = \frac{2}{\pi}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Svar: a) $z = 1 - \frac{2}{\pi}(x-1) + \frac{2}{\pi}(y-1)$.

Svar: b) Vattnet kommer att rinna från A längs den största lutningen nedåt, i samma riktning som $-\nabla f(1,1)$ pekar. Lutningen i denna riktning (den största) är lika med $|\nabla f(1,1)| = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

---

3. a) Projektionen av Ω på xy-planet är $D : x^2+3y^2 \le 8-x^2+y^2 \iff x^2+y^2 \le 4$. Då ges volymen av

$$V(\Omega) = \iint_\Omega \left(\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2+y^2} dz\right) dxdy = \iint_\Omega [8-2(x^2+y^2)]\, dxdy = \left\{\begin{array}{l} x = 2r\cos\varphi \\ y = 2r\sin\varphi \end{array}\right\}$$
$$= \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\int_0^1 (8-8r^2)\, 4r\, dr = 64\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = 16\pi.$$

b) Utflödet genom Ω beräknas enklast via Gauss' formel:

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_\Omega \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV = \iiint_\Omega [y+(1-2y)+y]\, dV = \iiint_\Omega dV = \text{volymen}(\Omega).$$

Svar: a,b) 16π.

---

4. $$\iint_S \frac{dxdy}{x\sqrt{y}} = \int_0^1\left(\int_{x^3}^x \frac{dy}{\sqrt{y}}\right)\frac{dx}{x} = \int_0^1 \Big[2\sqrt{y}\Big]_{x^3}^x \frac{dx}{x} = 2\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)dx = 2\left(2-\frac{2}{3}\right).$$

Svar: $\frac{8}{3}$.

---

5. Låt Ω vara ellipsskivan med rand $\gamma : x^2-2x+9y^2 = 0$, dvs $\Omega : (x-1)^2+9y^2 \le 1$. Greens sats ger

$$\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{r} = \iint_\Omega (Q'x - P'_y)\, dxdy = \iint_\Omega (-1-6y^2)\, dxdy = \left\{\begin{array}{l} x = 1+r\cos\varphi \\ y = \frac{r}{3}\sin\varphi \end{array}\right\}$$
$$= -\int_0^1\int_0^{2\pi}[1+\frac{2}{3}r^2\sin^2\varphi]\,\frac{r}{3}\, d\varphi dr = -\int_0^1\int_0^{2\pi}[1+\frac{2}{3}r^2\frac{1-\cos 2\varphi}{2}]\,\frac{r}{3}\, d\varphi dr$$
$$= -\frac{2\pi}{3}\int_0^1 [1+\frac{r^2}{3}]\, r\, dr = -\frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\right).$$

Svar: $-\frac{7\pi}{18}$.

---

6. Teckna VL av ekv. med $F(x,y,z(x,y))$. Implicit derivering m.a.p. x & y följd av subst. av $(1,1,1)$ ger

$$\left\{\begin{array}{l} F'_x + F'_z z'_x = 0 \\ F'_y + F'_z z'_y = 0 \end{array}\right. \implies \begin{pmatrix} z'_x \\ z'_y \end{pmatrix} = -\frac{1}{F'_z}\begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \end{pmatrix} \text{ med } \left\{\begin{array}{l} F'_x(1,1,1) = \left[\sqrt{y^2+3z^2} + \frac{yz}{1+(xyz)^2}\right]_{(1,1,1)} = \frac{5}{2}, \\ F'_y(1,1,1) = \left[\frac{xy}{\sqrt{y^2+3z^2}} + \frac{xz}{1+(xyz)^2}\right]_{(1,1,1)} = 1, \\ F'_z(1,1,1) = \left[\frac{3xz}{\sqrt{y^2+3z^2}} + \frac{xy}{1+(xyz)^2}\right]_{(1,1,1)} = 2. \end{array}\right.$$

Svar: $\nabla z(1,1) = -(\frac{5}{4},\frac{1}{2})$.

---

7. Fältet $\mathbf{F}$ är konservativt med en potential, t ex, $\Phi(x,y,z) = \sin(yz)+\cos(xz)+x\ln(1+y^2)$. Då är

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \Phi(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2},1) - \Phi(0,0,0). = 1 + \tfrac{\pi}{2}\ln(1+\tfrac{\pi^2}{4}) - 1.$$

Svar: $\frac{\pi}{2}\ln(1+\frac{\pi^2}{4})$.

---

8. Låt $f(x,y) = x(b+y)$ beteckna triangelns area. Då söker vi $\max f(x,y)$ då $g(x,y) = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1 = 0$.

Sätt 1 (med parametrisering): På ellipsen är $(x,y) = \mathbf{r}(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $|t| \le \frac{\pi}{2}$, så att arean är en funktion av parametern t: $\varphi(t) = f(\mathbf{r}(t)) = ab\cos t(1+\sin t)$. I ändpunkterna av intervallet är arean lika med noll $\Longrightarrow$ max nås i den enda interna kritiska punkten som utrönas ur:

$$0 = \varphi'(t) = ab[-\sin t - \sin^2 t + \cos^2 t]\varphi'(t) = -ab[2\sin^2 t + \sin t - 1] \Longrightarrow \sin t = -1 \text{ eller } \sin t = \frac{1}{2}.$$

Detta ger punkterna $(0,-b)$ med $f(0,-b)=0$ (min) och $(\frac{a\sqrt{3}}{2},\frac{b}{2})$ med $f(\frac{a\sqrt{3}}{2},\frac{b}{2})=\frac{3ab\sqrt{3}}{4}=f_{\max}$.
Sätt 2: (Lagrange): I de kritiska punkterna av f på ellipsen är $\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)$, dvs

$$0=\begin{vmatrix} -\nabla f- \\ -\nabla g- \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b+y & x \\ \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} \end{vmatrix} \iff \frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}+\frac{y}{b}.$$

Substitution i ellipsens ekvation $g(x,y)=0$ ger

$$2\frac{y^2}{b^2}+\frac{y}{b}-1=0 \implies y=-b \text{ eller } y=\frac{b}{2}.$$

Detta ger samma punkter $(0,-b)$ och $(\frac{a\sqrt{3}}{2},\frac{b}{2})$.

Svar: Max area $\frac{3ab\sqrt{3}}{4}$ a.e. fås då $(x,y)=(\frac{a\sqrt{3}}{2},\frac{b}{2})$.