TEKNISKA HÖGSKOLAN
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING
Tjavdar Ivanov

TENTAMEN TMAB17
Analys i flera variabler
2009-05-27, 08:00–13:00

Jour: Tjavdar Ivanov (ankn. 16 23, 0709-203611)

Ange dina bonuspoäng. Markera uppgifterna som täcks av bonus med 'B' på omslaget.

Bonuspoängen adderas oavkortade till slutsultatet. Du hoppar över så många på varandra följande uppgifter med start från uppg. 1 som bonuspoängen täcker helt. Tentan löses från och med den första uppgift du inte har tillräckligt med bonus att 'betala' fullt pris för. Lösningar till uppgifter som täcks av bonuspoängen beaktas ej.

Betygskala (ECTS i tabellen till höger är för internationella studenter):

Poäng	20–25	15–19	10–14	0–9
Betyg	5	4	3	U

Points	23–25	20–22	16–19	13–15	10–12	7–9	0–6
ECTS	A	B	C	D	E	FX	F

1. Visa att rotationen av varje C^2–fält $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ är källfritt, dvs att $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F})=\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0$. (2 p)

2. Bestäm alla stationära punkter till funktionen $f(x,y)=x^2-4xy+3y^2-10x+16y$. Bestäm sedan deras typ, dvs om är de lokala maxima, minima eller sadelpunkter. (2 p)

3. Bestäm värdet av cirkulationen $\displaystyle\oint_\gamma \frac{y\,dx}{x^2+y^2}-\frac{x}{x^2+y^2}\,dy$ moturs längs cirkeln $\gamma: x^2+y^2=R^2$. (2 p)

4. Bestäm volymen av den ändliga kroppen mellan ytorna $z=2x^2-y^2$ och $z=3-x^2-2y^2$. (2 p)

5. Låt $f(x,y)=\ln\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big)$, $(x,y)\neq(0,0)$. Visa att f är harmonisk, dvs att $f''_{xx}+f''_{yy}=0$. (2 p)

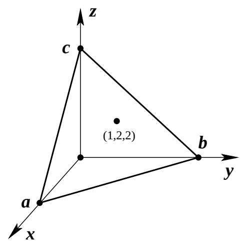
6. En droppe faller ner i punkten ovanför origo (z-axeln anses vara belägen lodrät) på ytan (3 p)
$$f(x,y)=1+\sin(2x-3y)+\ln(1+ax+by).$$
Bestäm alla parametrar a och b för vilka droppen kommer att rinna av längs riktningen $\mathbf{u}=(-3,4)$.

7. Bestäm flödet (3 p)
$$\oiint_S \begin{pmatrix} x\\ y\\ 1+z\end{pmatrix}\cdot\widehat{N}\,dS$$
ut genom alla begränsningsytor av kroppen $0\le z\le 1-x^2-y^2$.

8. Bestäm mängden arbete $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ som behövs för att förflytta en partikel i det konservativa kraftfältet (3 p)
$$\mathbf{F}(x,y,z)=\begin{pmatrix} ye^{xy}-z\sin(xz)\\ xe^{xy}+z\cos(yz)\\ y\cos(yz)-x\sin(xz)\end{pmatrix}$$
från punkten $(1,0,0)$ till $(1,0,2\pi)$ längs skruvlinjen $\gamma:\begin{cases}\mathbf{r}(t)=(\cos(t),\sin(t),t),\\ t:0\to 2\pi.\end{cases}$

9. Skissa området $D=\{(x,y): y^2\le x\le\sqrt{y}\}$. Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x^{6/5}\sqrt{y}}$. (3 p)

10. För vilka positiva a, b och c har pyramiden med hörn i origo, $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$ och lutande sida genom punkten $(1,2,2)$, minst volym? (3 p)
Tips: Den lutande sidan ligger i planet $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ och volymen är $\dfrac{abc}{6}$.
Lös optimeringsproblemet under bivillkor: $\begin{cases}\min/\max\ f(a,b,c)=\dfrac{abc}{6}\\ g(a,b,c)=\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{2}{c}=1.\end{cases}$



Solutions sketch for the written exam in Analys i flera variabler , 2009-05-27.

1. Eftersom de blandade derivatorna av C^2-fuktioner (i detta fall $\mathbf{F}$:s komponenter P, Q och R) ar lika, fås

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R'_y - Q'_z \\ P'_z - R'_x \\ Q'_x - P'_y \end{pmatrix} = R''_{yx} - Q''_{zx} + P''_{zy} - R''_{xy} + Q'_{xz} - P''_{yz} \equiv 0.$$

---

2. Funktionen är $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, alla lokala extrema måste vara kritiska punkter i vilka $\nabla f = \mathbf{0}$. Man har

$$\begin{cases} 0 = f'_x = 2x - 4y - 10, \\ 0 = f'_y = -4x + 6y + 16 = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1, \\ y = -2, \end{cases}$$

så, den enda kritiska punkten f har är $(1, -2)$. Eftersom i omgivningen av denna punkt är

$$\Delta f = f(1+h, -2+k) - f(1,-2) = \frac{1}{2}Q(h,k) + |(h,k)|^2\rho(h,k) \quad \text{med } \rho(h,k) \to 0 \text{ då } (h,k) \to (0,0),$$

så bestäms typen av denna stationära punkt av tecknet av den kvadratiska förmen $Q(h,k) = h^2 f''_{xx} + 2hkf''_{xy} + k^2 f''_{yy}$. Man beräkar i tur och ordning $f''_{xx}(1,-2) = 2$, $f''_{xy}(1,-2) = -4$ och $f''_{yy}(1,-2) = 6$, så att

$$Q(h,k) = 2h^2 - 8hk + 6k^2 = 2[h^2 - 4hk + 3k^2] = 2[(h+2k) - k^2].$$

Den kvadratiska formen $Q(h,k)$ växlar tecken och är således indefinit. Därmed finns riktningar bort från $(1,-2)$ i vilka f växer samt riktiningar i vilka f avtar. **Svar**: Sadelpunkt i $(1, -2)$.

---

3. Låt Ω vara cirkelskivan med rand γ, dvs $\Omega : x^2 + y^2 \leq R^2$. Eftersom $x^2 + y^2 = R^2$ på γ, så är

$$\oint_\gamma \frac{y\,dx}{x^2+y^2} - \frac{x\,dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{R^2}\oint_\gamma y\,dx - x\,dy = \frac{1}{R^2}\iint_\Omega (Q'_x - P'_y)\,dxdy = -\frac{2}{R^2}\iint_\Omega dxdy$$

Svar: -2π.

---

4. Volymen V ges av

$$V = \iint_{2x^2-y^2 \leq 3-x^2-2y^2} \left(\int_{2x^2-y^2}^{3-x^2-2y^2} dz\right) dxdy = \iint_{x^2-y^2/3\leq 1} (3 - 3x^2 - y^2)\,dxdy$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = \sqrt{3}r\sin\varphi \end{pmatrix}\right\} = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-r^2)\sqrt{3}r\,dr = 6\pi\sqrt{3}[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}] = \frac{3\pi\sqrt{3}}{2}.$$

Svar: $\dfrac{3\pi\sqrt{3}}{2}$ v.e.

---

5. Teckna $r = r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, då är $f(x,y) = \ln r$, $r \neq 0$. Man har då att

$$r'_x = (\sqrt{x^2+y^2})'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = x/\mathbf{r} \quad \text{och} \quad r'_y = y/r.$$

Derivering 2 gånger ger

$$\oplus \begin{cases} f''_{xx} = (\ln r)''_{xx} = (\frac{1}{r}\frac{x}{r})'_x = \left(\frac{x}{r^2}\right)'_x = \frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4} \\ f''_{yy} = (\ln r)''_{yy} = (\frac{1}{r}\frac{y}{r})'_y = \left(\frac{y}{r^2}\right)'_y = \frac{1}{r^2} - \frac{2y^2}{r^4} \end{cases}$$

och summering ger (Obs! $x^2 + y^2 = r^2$)

$$\Delta f = f''_{xx} + f''_{yy} = \frac{2}{r^2} - \frac{2x^2+2y^2}{r^4} = \frac{2}{r^2} - \frac{2r^2}{r^4} = \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2} \equiv 0, \quad r \neq 0.$$

---

6. Droppen kommer att rinna av längs största lutningen nedåt som pekas av $-\nabla f(0,0)$. Då krävs att

$$-\nabla f(0,0) = -\begin{pmatrix} 2\cos(2x-3y) + \dfrac{a}{1+ax+by} \\ -3\cos(2x-3y) + \dfrac{b}{1+ax+by} \end{pmatrix}_{|(0,0)} = \begin{pmatrix} -2-a \\ 3-b \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t > 0.$$

Svar: För alla $(a,b) = (-2,3) + t(3,-4)$, $t > 0$.

7. Fältet är $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, S omsluter kroppen $V: 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2$, Gauss sats kan tillämpas:

$$\oiint_S \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1+z \end{pmatrix} \cdot \widehat{N}\, dS = \iiint_S \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1+z \end{pmatrix} dV = 3 \iint_{x^2+y^2\le 1} \int_0^{1-x^2-y^2} dz \; dxdy = 3 \iint_{x^2+y^2 \le 1} (1-x^2-y^2)\, dxdy$$
$$= \left\{ \begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r \sin\varphi \end{matrix} \right\} = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-r^2) r\, dr = 6\pi[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}] = \frac{3\pi}{2}.$$

Alternativt, med direktuträkning: Flödet genom paraboloiden S_1 (en funktionsyta ovanför enhetscirkeln i xy-planet) ger

$$I_1 = \iint_{S_1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1+z \end{pmatrix} \cdot \widehat{N}\, dS = \iint_{x^2+y^2 \le 1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2-x^2-y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 1} (2+x^2+y^2)\, dxdy$$
$$= \left\{ \begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r \sin\varphi \end{matrix} \right\} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (2+r^2) r\, dr = 2\pi[1 + \frac{1}{4}] = \frac{5\pi}{2}.$$

Flödet genom bottnet $S_2 : x^2 + y^2 \le 1$ i xy-planet (dvs $z = 0$) med nedåtriktad (dvs utåt) normal $(0, 0, -1)$

$$I_2 = \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \widehat{N} = \iint_{x^2+y^2\le 1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dxdy = - \iint_{x^2+y^2 \le 1} dxdy = -(\text{arean av enhetscirken}) = -\pi.$$

Då är

$$\oiint_S \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1+z \end{pmatrix} \cdot \widehat{N}\, dS = I_1 + I_2 = \frac{5\pi}{2} - \pi = \frac{3\pi}{2}.$$

Svar: $\frac{3\pi}{2}$.

---

8. Eftersom fältet är konservativt, bestämmer man en potential, t.ex., $\Phi(x, y, z) = e^{xy} + \sin(yz) + \cos(xz)$, så att

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} ye^{xy} - z\sin(xz) \\ xe^{xy} + z\cos(yz) \\ y\cos(yz) - x\sin(xz) \end{pmatrix} = \nabla\Phi(x,y,z) \text{ och } \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Big[\Phi\Big]_{(1,0,0)}^{(1,0,2\pi)} = 2 - 2 = 0.$$

Man kan, alternativt, välja en enklare väg mellan punkterna, t ex sträckan mellan dem:

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad = \left\{ \left\{ \begin{matrix} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2\pi t \end{matrix} \right. \right\} = \int_0^1 \begin{pmatrix} -2\pi t \sin(2\pi t) \\ 1 + 2\pi t \\ -\sin(2\pi t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi \end{pmatrix} dt = -2\pi \int_0^1 \sin(2\pi t)\, dt = 0.$$

Svar: .

---

9. Området beskrivs av olikheterna $D : \left\{ \begin{matrix} 0 \le y \le 1 \\ y^2 \le x \le \sqrt{y} \end{matrix} \right. \iff D : \left\{ \begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le x \le \sqrt{x} \end{matrix} \right.$. Då är

$$\iint_D \frac{dxdy}{x^{6/5}\sqrt{y}} = \int_0^1 x^{-6/5} \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{dy}{\sqrt{y}} \right) dx = \int_0^1 x^{-6/5} \Big[2\sqrt{y}\Big]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = 2\int_0^1 x^{-6/5} \Big[x^{1/4} - x\Big] dx$$
$$= 2\int_0^1 \Big[x^{-19/20} - x^{-1/5}\Big] dx = 2\Big[20x^{1/20} - \frac{5}{4}x^{4/5}\Big] = 2\Big[20 - \frac{5}{4}\Big].$$

Svar: $\frac{75}{2}$.

---

10. Klart att $a > 1$, $b > 2$, $c > 2$ (likhet eller omvänd olikhet medför oändlig volym). Restriktionen $f_{|S}$ på ytan $S : g(a, b, c) = 0$ kan efter glat parametrisering betraktas som funktion av två variabler. I de kritiska punkterna av denna funktion är ∇f och ∇g parallella, dvs (Lagrange) $\nabla f = \lambda \nabla g$, eller,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 6\nabla f \times \nabla g = \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1/a^2 \\ -2/b^2 \\ -2/c^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2a/c - 2a/b \\ b/a - 2b/c \\ 2c/b - 2c/a \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2a(1/c - 1/b) \\ b(1/a - 2/c) \\ 2c/b - 2c/a \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{matrix} b = c \\ c = 2a \\ b = 2a. \end{matrix} \right.$$

Men $(a, b, c) = (a, 2a, 2a)$ är punkt på ytan S och då är $1 = g(a, 2a, 2a) = 1/a + 1/a + 1/a = 3/a$. Den enda kritiska punkten av $f_{|S}$ infaller således då $a = 3$ och $b = c = 6$.

Svar: $V_{\min} = f(3, 6, 6) = 18$ v.e.
