TEKNISKA HÖGSKOLAN
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING
Tjavdar Ivanov

# TENTAMEN TMAB19
# Analys i flera variabler
# 2010-05-25, 12:00–17:00

Jour: Tjavdar Ivanov (ankn. 16 23, 0709-203611)

**Ange dina bonuspoäng. Markera uppgifterna som täcks av bonus med 'B' på omslaget.**

Bonuspoängen adderas oavkortade till slutsultatet. Du hoppar över så många på varandra följande uppgifter med start från uppg. 1 som bonuspoängen täcker helt. Tentan löses från och med den första uppgift du inte har tillräckligt med bonus att 'betala' fullt pris för. Lösningar till uppgifter som täcks av bonuspoängen beaktas ej.

**Betygskala (ECTS i tabellen till höger är för internationella studenter):**

| **Poäng** | 20–25 | 15–19 | 10–14 | 0–9 |
|---|---|---|---|---|
| **Betyg** | 5 | 4 | 3 | U |

| **Points** | 23–25 | 20–22 | 16–19 | 13–15 | 10–12 | 7–9 | 0–6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ECTS** | A | B | C | D | E | FX | F |

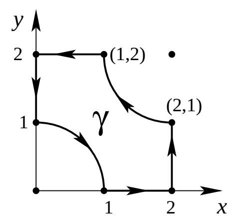
Lösningsskiss publiceras efter tentan på kurshemsidan `http://aragorn.hj.se/~ivtj/kurser/fv`.

1. Visa att funktionen $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ är harmonisk, dvs att $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$ för alla $(x,y) \neq (0,0)$. (2 p)

2. Bestäm alla kritiska punkter till funktionen (3 p)
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$
Avgör vilka av dessa kritiska punkter som är lokala extrema genom att studera de respektive kvadratiska formerna.

3. Bestäm volymen av kroppen som bestäms av olikheterna $(x,y,z) : 5x^2 + 3y^2 \leq z \leq x^2 - y^2 + 8y$. (3 p)

4. Bestäm cirkulationen (3 p)
$$\oint_\gamma \begin{pmatrix} 13y + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \\ 17x - \arctan(\frac{y}{x}) \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r}$$
längs den positivt orienterade konturen $\gamma$ (se figuren till höger) som består dels av sidorna av en kvadrat, dels av två cirkelbågar från cirklarna centrerade i origo och i (2,2).

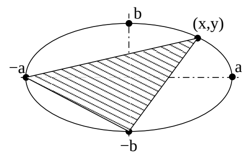



5. Ekvationen (3 p)
$$x^3y^7 + y^3z^5 - 2xz = 0$$
definierar en $C^1$-funktion $z = z(x,y)$ i omgivningen av punkten $(x_0,y_0) = (1,1)$, så att $z(1,1) = 1$. Bestäm värdet av riktningsderivatan $z'_{\mathbf{v}}(1,1)$ till denna implicit angivna funktionen då vektorn $\mathbf{v}$ pekar i riktningen $(2,-1)$.

6. Bestäm flödet (3 p)
$$\oiint_S \begin{pmatrix} z\ln(1+y^2+z^2) \\ 5y - 17xz \\ x\sin^2(y) - 2z \end{pmatrix} \cdot \widehat{N}\, dS$$
**ut** ur samtliga begränsingsytor $S$ av kroppen $V = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2+y^2}\}$.

7. Låt $D$ vara triangeln med hörn i origo, $(1,0)$ och $(0,1)$. Beräkna värdet av den generaliserade integralen (3 p)
$$\iint_D \frac{dxdy}{x+y}.$$

8. En triangel med två av hörnen i $(-a,0)$ och $(0,-b)$ är inskriven i ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Bestäm den största arean en sådan triangel kan få. (3 p)
Tips: Triangelns area (då tredje hörnet är i I, II eller IV kvadrant) ges av
$$f(x,y) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x+a & y \\ x & y+b \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(bx + ay + ab).$$




**Var god vänd!**

9. Ett kraftfält $\mathbf{F}(x,y,z)$ kallas för centralkraftfält om

$$\mathbf{F}(x,y,z) = f(r)\mathbf{r}, \quad \text{dar } \mathbf{r} = (x,y,z) \text{ och } r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

samt $f$ är en kontinuerlig funktion av en variabel. (Rörelsen i ett sådant fält kallas för centralrörelse).

a) Visa att varje centralkraftfält är konservativt med potential $\Phi(x,y,z) = \int r f(r)\, dr$. (1 p)

b) Bestäm nu blixtsnabbt en potential $\Phi(x,y,z)$ till det centrala kraftfältet (1 p)

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

**Bonne chance!**

Solutions sketch for the written exam in Analys i flera variabler , 2010-05-25.

**1.** Man deriverar 2 ggr:

$$\begin{cases} f''_{xx} = \left(\frac{1}{1+y^2/x^2}(-\frac{y}{x^2})\right)'_x = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ f''_{yy} = \left(\frac{1}{1+y^2/x^2}\frac{1}{x}\right)'_y = \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -f''_{xx} \end{cases}$$

Därmed är $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$ för alla $(x, y) \neq (0, 0)$.

---

**2.** I de kritiska punkterna är

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_x = 4(x^3 - y) = 0 \\ f'_x = 4(y^3 - x) = 0 \end{array} \right\} \implies y = x^3 \implies x^9 - x = x(x^4 - 1) = 0 \implies x = 0, \pm 1.$$

Funktionen $f$ har således 3 st kritiska punkter — origo, samt $\pm(1, 1)$. De andra partiella derivatorna ges av

$$f''_{xx}(x, y) = 12x^2, \quad f''_{xy}(x, y) = -4, \quad f''_{yy}(x, y) = 12y^2.$$

Sammanfattar teckenstudien av de kvadratiska formerna i tabellen nedan:

| Punkt | $f''_{xx}$ | $f''_{xy}$ | $f''_{yy}$ | $Q(h,k) = f''_{xx} + 2f''_{xy} + f''_{yy}$ | Typ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0,0)$ | 0 | -4 | 0 | $-8hk <> 0$ | sadelpunkt |
| $\pm(1,1)$ | 12 | -4 | 12 | $12(h^2 - \frac{2}{3}hk + k^2) = 12[(h - \frac{1}{3}k)^2 + \frac{8}{9}k^2] > 0$ | lok. min. |

**Svar**: Sadelpunkt i origo, lokala minima i $(1, 1)$ och $(-1, -1)$.

---

**3.** Kroppen är belägen ovanför området $D$ i $xy$-planet där

$$5x^2 + 3y^2 \leq x^2 - y^2 + 4y \iff 4x^2 + 4y^2 - 8y \leq 0 \iff x^2 + y^2 - 2y \leq 0 \implies D = \{(x, y) : x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}.$$

Då ges volymen av

$$V = \iint_D \left(\int_{5x^2+3y^2}^{x^2-y^2+8y} dz\right) dxdy = 4 \iint_D \left[1 - x^2 - (y-1)^2\right] dxdy$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = 1 + r\sin\varphi \end{array} \right. = 4\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\int_0^1 (1 - r^2) r\, dr.$$

**Svar**: $2\pi$ v.e.

---

**4.** Användning av Greens formel ger ($D$ är det plana område vars rand är $\gamma$).

$$\oint_\gamma \begin{pmatrix} 13y + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \\ 17x - \arctan(\frac{y}{x}) \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \begin{vmatrix} D_x & D_y \\ 13y + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) & 17x - \arctan(\frac{y}{x}) \end{vmatrix} dxdy$$

$$= \iint_D [17 + \frac{y}{x^2+y^2} - 13 - \frac{y}{x^2+y^2}]\, dxdy = 4\iint_D dxdy = 4 \cdot \text{arean}(D).$$

Arean av $D$ = kvadratens area minus arean av 2 st kvartsenhetscirklar. **Svar**: $4[2^2 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}] = 16 - 2\pi$.

---

**5.** Riktningsderivatan $z'_{\mathbf{v}}(1, 1) = \nabla z(1, 1) \cdot \mathbf{v}$. Teckna $F(x, y, z) = x^3y^7 + y^3z^5 - 2xz$. Enligt implicita funktionssatsen är

$$\begin{cases} z'_x(1,1) = -\frac{F'_x(1,1,1)}{F'_z(1,1,1)} = -\left.\frac{3x^2y^7 - 2z}{5y^3z^4 - 2x}\right|_{(1,1,1)} = -\frac{1}{3}; \\ z'_y(1,1) = -\frac{F'_y(1,1,1)}{F'_z(1,1,1)} = -\left.\frac{7x^3y^6 + 3y^2z^5}{5y^3z^4 - 2x}\right|_{(1,1,1)} = -\frac{10}{3}. \end{cases}$$

Då är

$$z'_{\mathbf{v}}(1,1) = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Svar**: $\frac{8}{3\sqrt{5}}$.

---

**6.** Med hjälp av Gauss sats (divergenssatsen) fås

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \widehat{N}\, dS = \iiint_V \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z\ln(1 + y^2 + z^2) \\ 5y - 17xz \\ x\sin^2(y) - 2z \end{pmatrix} dV = \iiint_V (0+5-2)\, dV = 3\iiint_V dV = 3 \times \text{volymen}(V).$$

$V$ består av två likadana koner av höjd 1 med gemensam bas enhetscirkeln i planet $z = 1$. **Svar**: $2\pi$.

---

**7.** Området $D$ i första kvadrant avgränsas av linjen $x+y=1$ och koordinatalarna. Då är

$$\iint_D \frac{dxdy}{x+y} = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \frac{dy}{x+y}\right) dx = \int_0^1 [\ln(x+y)]_0^{1-x}\, dx = -\int_0^1 \ln(x)\, dx \overset{p.i.}{=} \Big[-x\ln(x)+x\Big]_0^1 = 1.$$

Vi har använt ovan det kända gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$. **Svar**: 1.

---

**8.** Teckna ellipsens ekvattion $\gamma : g(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Då ges den maximala arean av lösningen av optimizationsproblemet under bivillkor

$$\max f\Big|_\gamma = \begin{cases} \max f(x,y) = \frac{1}{2}(bx+ay+ab) \\ g(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Lösningen kan erhållas, t ex, via Lagranges multiplikatormetod. På ellipsen är $f\Big|_\gamma$ funktion av en variabel och i de kritiska punkterna av denna funktion är $\nabla f = \lambda \nabla g$, dvs

$$0 = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 2\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix} b & a \\ x/a^2 & y/b^2 \end{vmatrix} = \frac{y}{b} - \frac{x}{a} \iff \frac{y}{b} = \frac{x}{a}.$$

Substitution i ellipsens ekvation ger

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \implies (x,y) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(a,b).$$

Den maximala arean fås då båda $x>0$ och $y>0$, dvs $f_{\max} = f(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}) = \frac{ab}{2}(\sqrt{2}+1)$.
Alternativ lösning: Ellipsen parametriseras i polära koordinater, så att

$$f\Big|_\gamma = f(a\cos(\varphi), b\sin(\varphi)) = \frac{ab}{2}[\cos(\varphi)+\sin(\varphi)+1] = h(\varphi).$$

Funktionen $h$ är $C^\infty$, periodisk och begränsad, så att dess max och min kan hamna i dess kritiska punkter:

$$0 = h'(\varphi) = \frac{ab}{2}[-\sin(\varphi)+\cos(\varphi)] \iff \sin(\varphi) = \cos(\varphi) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Man får de samma punkterna $(x,y) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(a,b)$ som ovan. **Svar**: $f_{\max} = f(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}) = \frac{ab}{2}(\sqrt{2}+1)$ a.e.

---

**9.** a) $\nabla\Phi(x,y,z) = (\int rf(r)\,dr)' \begin{pmatrix} (r)'_x \\ (r)'_y \\ (r)'_z, \end{pmatrix} = rf(r)\begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix} = f(r)\mathbf{r}$, VSV.

b) Fältet $\mathbf{F}(x,y,z) = \dfrac{1}{r^2}\mathbf{r}$, då ges potentialen enl a) av:

$$\Phi(x,y,z) = \int r\,\frac{1}{r^2}\,dr = \int \frac{dr}{r} = \ln(r) + C.$$

**Svar**: b) $\Phi(x,y,z) = \ln[\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,] = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$ duger.

---